Math

635

H. Landry

Algebraische, geometrische und trigonometrische

Uebungen

im Gewande einer

analytischen Geometrie.

Vom

Professor Dr. Martin Ohm,

zur Zeit an der Königlichen Universität, an der Königlichen Bau-Akademie und an der Königlichen allgemeinen Kriegsschule zu Berlin, so wie auch mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Als erste Fortsetzung

seiner

reinen Elementar-Mathematik.

Die Analysis erfindet; die Synthesis begründet; und nur beide Methoden in Verbindung führen zum gründlichen und umfassenden Wissen.

Berlin 1826.

Bei T. H. Riemann.

Die

analytische und höhere Geometrie

in ihren Elementen.

Mit vorzüglicher Berücksichtigung

der

Theorie der Kegelschnitte.

Zunächst

für seine Universitäts-Vorlesungen, dann aber auch für ähnliche Anstalten und zum Selbst-Unterrichte

bearbeitet

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

zur Zeit an der Königlichen Universität, an der Königlichen Bau-Akademie und an der Königlichen allgemeinen Kriegsschule zu Berlin, so wie auch mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Erste Fortsetzung seiner reinen Elementar-Mathematik.

Berlin 1826.

Bei T. H. Riemann.

STADTBIBLIOTHEK
AUGSBURG

Vorrede.

Wenn Anfänger die 3 Bände der reinen Element.-Mathem. Berlin 1825. und 1826. verstanden und das darin enthaltene durch wiederholtes Durchgehen sich zu eigen gemacht haben, so sind sie dadurch fähig geworden, ein gründliches Studium der Mathematik beginnen zu können. Um aber eines schnellen Erfolges sich zu erfreuen, in dieser zweiten Periode ihres mathematischen Lebens, thut ihnen zweierlei vorzüglich Noth; 1) die Fertigkeit in den verschiedenen elementaren (algebraischen, trigonometrischen ꝛc. ꝛc.) Rechnungen durch zweckmäßig und täglich fortgesetzte Uebung immer fort zu erhöhen, und bis zu dem größt-möglichsten Grad zu steigern; 2) sich in die mathematische Erfindungskunst gleich vom Anfange an recht tüchtig hineinzuarbeiten.

Gegenwärtige Schrift ist nun Behufs der Erreichung dieser beiden Zwecke ausgearbeitet worden, und deshalb als die erste Fortsetzung der reinen Elementar-Mathematik zu betrachten, weil sie sich unmittelbar an diese anschließt. Auch hier geht Synthesis (als Methode, nicht im gewöhnlichen Sinne des Mathematikers) mit der Ana-

lysis (als Methode) Hand in Hand, so nehmlich, daß letztere erfindet, die erstere dagegen die nothwendige Existenz des Gefundenen dokumentirt; was dem rein analytischen Gange nie möglich ist.

Wegen mancher Abweichungen von der betretenen und befahrenen Straße, glaubt sich der Vfr. rechtfertigen zu müssen.

Erstlich nehmlich wird man Anstoß finden, daß hier die Existenz der entgegengesetzten Größen auf's neue geläugnet wird, in einer Lehre, die so recht eigentlich auf jene gepfropft zu seyn schien, und die in Nichts zusammenzufallen drohte, sobald man ihren Grund und ihre Stütze wegnahm. — Aber kann der Verfasser anders, nachdem er jene Existenz schon 3 volle dicke Bände hindurch geläugnet hat, (manchen andern nicht hierher zu zählenden Band abgerechnet) und dieser gegenwärtige als der 4te zu betrachten ist? Ja sieht er sich nicht sogar nach einem Lobredner deshalb um, daß er mit so unerschütterlicher Consequenz fortschreitet, und mit Leichtigkeit so fortschreiten kann, und hofft er nicht auch, daß diese Schrift dadurch viel gründlicher und den Geist viel befriedigender ausgefallen ist?

Zweitens wird man es als abweichend tadeln, daß hier so wenig materielles erzielt wird, ja, daß die bekanntesten Sätze der Kegelschnitte erst ganz zuletzt und so gleichsam nur als eine Zugabe oder als Gratial gegeben werden, während von andern krummen Linien nicht einmal

die Rede ist. — Diesen Tadel muß sich der Vfr. gefallen lassen, weil er seinerseits wiederum tadeln möchte, daß der mathematische Unterricht meist blos die Absicht zu haben scheint, Resultate zu liefern. Der Vfr. mag nicht gerne den Reisenden gleichen, die sich vornehmen, gewisse schon genugsam bekannte Städte zu besuchen in einer gewissen Folge, und nun mit Extrapost Tag und Nacht, gleichgültig ob schlafend oder träumend oder wachend, an Allem dazwischen liegenden vorüberfahren, nur immer der gebahnten Kunststraße folgend, um dieses vorgesteckte Ziel ihrer Reise in der kürzesten Zeit und mit der mindesten Unbequemlichkeit zu erreichen. Und wären ihm Zöglinge anvertraut, welche die Welt kennen lernen sollen, und die Menschen in ihr, so stritte diese Art zu reisen sogar gegen sein Gewissen. Er macht sich und die ihm anvertrauten Zöglinge lieber zuerst fähig, mit Nutzen auf Reisen zu gehen, einmal des eigenen Bedürfnisses wegen, dann auch um sowohl von den kleinen Reisen, welche die Zöglinge jetzt der Uebung wegen machen, so wie von den größern, welche sie späterhin unternehmen, den größtmöglichsten Nutzen ziehen zu können, überall sogleich einheimisch zu seyn, das oft unscheinbare aber für ihren künftigen Beruf wichtige, schnell und sicher in das Auge zu fassen, das blos Prunkende nur oberflächlich mitzunehmen, überhaupt den Schein von der Wahrheit zu unterscheiden.

Der Vfr. betritt ferner deshalb nicht immer bereits

geebnete Straßen, weil es wünschenswerth ist, daß unter seinen Zöglingen einer oder der andere seyn möge, welcher Kraft und Muth hat in fernen unbekannten Landen auf Entdeckungsreisen auszugehen, und dann gelernt haben muß, sich selbst Wege durchzuhauen, zu bahnen und wenigstens für den augenblicklichen Bedarf zu ebnen und gangbar zu machen, wenn auch einige dieser Steige nach Jahrhunderten erst, nach Bedarf und mit Hilfe der Menge zu Kunststraßen ausgebildet werden; hernach von jedem bequem befahrbar. *) Und kommt es nicht auch denen zu Gute, die im Lande bleiben, aber kleine Entdeckungs-Ausflüge in die nähere und nächste Umgebung machen wollen, wenn sie gelernt haben, sich überall bald und schnell zurecht zu finden und kleine nöthige, oder doch erleichternde und abkürzende Zwischenkommunikationen anzulegen? —

Endlich aber drittens würde man dem Vfr. Unrecht thun, wenn man ihm zur Last legen wollte, als gehe er auf dem ihm bekannten Gebiete der Mathematik, in des-

---

*) Und um diese wichtige Sache ohne Metapher noch einmal zur Sprache zu bringen, so mag bemerkt werden, daß der Vfr. bei allen seinen Lehrbüchern und auch als akademischer Lehrer bei seinen Verträgen nie die Absicht haben kann, mathematische Sätze zu entwickeln, sondern daß er allemal nur den Leser oder Zuhörer zum Bewußtseyn und zur selbstthätigen Verstärkung der Kraft bringen will, vermöge welcher er im gesammten Gebiete der Mathematik als Selbsterfinder auftreten kann, d. h. die Mathematik aus sich selbst herauswickeln kann. Das in denselben Lehrbüchern bemerkbare Streben, problematische Sätze entweder als allgemein ungültig nachzuweisen oder ihre Gültigkeit zur höchsten Evidenz zu bringen, ist blos eine zufällige, wenn auch nicht unwichtige Folge der vorbemerkten Richtung.

sen französischen und englischen Anlagen, in seinem holländischen Blumenflore und auch in den deutschen Ackerstücken, der Lombardischen Moräste nicht zu gedenken, nur so zur Lust herum, und höchstens um die, so ihm folgen, zu ermüden und gegen Beschwerden abzuhärten. Wer nehmlich die Wege des Vfrs. von vorne herein mit Aufmerksamkeit verfolgt, der wird in seinen Bewegungen und Wendungen überall innere Nothwendigkeit erblicken und nicht planlosen Zufall, der ihm über alles verhaßt ist.

Dieses letztern Umstandes wegen, mögen noch folgende Erörterungen hier stehen.

1) Der Verfasser mußte durchaus schiefwinkliche Coordinaten-Axen zu Grunde legen, weil eine große Menge ihm für die Theorie sehr wichtig scheinender Fragen außerdem von ihm keinesweges befriedigend hätten beantwortet werden können.

2) Der Vfr. durfte sich nirgends und namentlich z. B. bei der Veränderung der Coordinaten-Axen, einer Figur bedienen, weil alles aus einer Figur mittelst Euklidisch geometrischen oder trigonometrischen Betrachtungen abgeleitete auch nur so lange gelten kann, als eben gerade diese Figur vorausgesetzt werden darf, so daß man in den vielen andern Fällen, wo die Figur eine andere wird, nicht mit Nothwendigkeit behaupten kann, daß nun dasselbe Resultat noch statt finden werde. Dieser bedenkliche Umstand verursachte, daß sogleich von vorne herein ein mehr großartiger allgemeiner Gang eingeleitet werden

mußte. Für den Anfänger findet man jedoch in eingeschalteten (mit ½ bezeichneten) Paragraphen dieselben Entwickelungen aus der Figur, so wie überhaupt möglichst anschauliche und vielseitige Behandlung, damit der allgemeine Gang desto bequemer und schöner hervortreten möge.

3) Es war Hauptzweck des Vfrs. nichts mehr unbestimmt zu lassen, auch nicht das (+ oder —) eines vorkommenden Wurzelzeichens. In dieser Hinsicht dürfte diese Schrift viel neues enthalteu. Auf der andern Seite hat die Befriedigung dieses Bedürfnisses ebenfalls eigene Sätze nöthig gemacht, die man nun aufgestellt finden wird, (auch derjenige, welcher nicht gleich wissen wird, warum, in so ferne er zu oberflächlich ließt).

Und so gehe denn hin, mein Büchlein, in alle Welt und lehre, — nicht alle Völker — sondern nur die, so mit dir Geistes verwandt sind, unter allen Völkern. Und strebst du nach Wahrheit, redlich und ohne Nebenabsicht, so wird weder der übermäßige Tadel deiner Feinde, noch das übermäßige Lob deiner Freunde dir hinderlich seyn können in dieser Welt. Gehe denen aus den Weg, welche dich nicht lieben können, und belohne die, so Dich mit Liebe und Zutrauen aufnehmen, nach Kräften durch neue und verborgene Reize und namentlich durch das unschätzbare Vergnügen, den Verstand und ein aus ihm hervorgegangenes geistiges Bedürfniß möglichst vollständig befriedigt zu sehen.

In dieser Vorrede zu den Elementen der höhern Geometrie hat der Vfr. auch noch etwas nachzuholen, was eigentlich in die Vorrede zum zweiten Bande seiner reinen Elementar-Mathematik hätte aufgenommen werden sollen. Da es nehmlich feststeht, daß es viel besser wäre, in Lehrbüchern der Geometrie keine Figuren zu gebrauchen, so hat der Vfr. von den einigen Hundert Figuren welche zu dem gedachten zweiten Bande gehörten und im Broullon gezeichnet waren, sechs Stücke weggelassen, welche bei dem reinen Zeichnen in den, dem Formate nach gegebenen Figurentafeln nicht recht Platz finden wollten; weil er nicht 6 Figuren wegen eine neue Tafel noch anlegen wollte, die nahe an 100 Figuren aufnimmt. Diese 6 Figuren hat er nun, da es in seiner Willkühr stund, am liebsten aus denen zu den Uebungs-Aufgaben gehörigen entnommen, wie er glaubt, zum Nutzen und Frommen der sich Uebenden, da sie im Nothfalle die Figur nach dem Texte zeichnen können. Weil aber der Text schon gedruckt war, so mußten die Nummern der Figuren so bleiben wie sie im Broullon waren, und so kommt es denn, daß zwischen der ersten und zweiten Figurentafel daselbst eine kleine Lücke zu seyn scheint. — Auch hier muß also der Schein von der Wahrheit unterschieden werden.

Berlin, den 25sten September 1826.

Dr. M. Ohm.

Einleitung.

Bei dem Vortrage später folgender Theile der Mathematik kommt alles zunächst darauf an, zu wissen, was man voraussetzen darf, auch wie man es voraussetzen darf, um Consequenz und wissenschaftliche Einheit in das Ganze zu bringen. In dieser Beziehung würde sich der Vfr. genöthigt sehen, auf seine

Elementar-Mathematik in 3 Bänden. Berlin 1825 und 1826,

an welche sich die vorliegende Schrift zunächst anschließt, und auch auf den ersten Theil seines

Lehrbuchs der Arithmetik, Algebra und Analysis. Berlin 1822

zu verweisen, um hier auf diese Grundlage weiter bauen zu können. Um aber auch für solche, welche jene Schriften nicht zuvor lesen wollen, den Standpunkt zu bezeichnen, aus welchem diese Elemente der analytischen Geometrie zu nehmen sind, hat es der Vfr. nach reiflicher Ueberlegung für das Beste gefunden, was von dem vorhergehenden hier vorzüglich nothwendig oder unentbehrlich ist, in dieser Einleitung und nur in den Resultaten *) zusammenzustellen; und es wird diese Zusammenstellung

*) Die Kritik wird besonders darauf aufmerksam gemacht, daß diese Einleitung nur Resultate hinstellt, deren systematische Begründung in den angeführten Schriften versucht, und zum Theil in den

zugleich auch dem nützlich werden, welcher den Entwickelungen jener Schriften gefolgt ist, aber doch bequemer und auf einmal die hier nöthigen Endresultate derselben zu übersehen wünscht.

Und nun sogleich zur Sache selbst.

1.

Es giebt keine entgegengesetzten Größen, also auch keine positive und keine negative Größe, sondern jede Größe ist eine absolute.*)

Größe (quantitas) oder benannte Zahl ist ein und dasselbe; von ihr verschieden ist die Größe (quantum) als dasjenige, welches als eine benannte Zahl gedacht und hergestellt werden kann.

Wirft man von der Größe oder der benannten

Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik. Berlin 1823, so wie in der

Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin 1825,

noch weiter erläutert worden ist. Glaubte daher die Kritik, diese Resultate der Einleitung nicht alle passiren lassen zu können, so würde dies in einer Beurtheilung der angeführten Schriften, nicht aber der gegenwärtigen, näher erörtert werden müssen. In der gegenwärtigen Schrift hat der Vfr. nur gestrebt, auf das, was in der Einleitung als festgestellt betrachtet wird, mit möglichster Consequenz weiter zu bauen.

*) Wer will den Dualismus in der Natur läugnen? — Vorwärts und rückwärts gehen, steigen und fallen, Vermögen und Schulden, etc. etc. sind einander entgegengesetzt; nur führt es zu Inconsequenzen, wenn wir diesen Gegensatz auf die Größen werfen. Lassen wir ihn auf den Dingen haften, an denen wir ihn wahrnehmen; nehmen wir die Größen selbst absolut, so wird sich der Gegensatz der Dinge anschließen an den Gegensatz der Operationen, zunächst des Addirens und des Subtrahirens; und die Inconsequenzen werden wegfallen. Wären 2 Meilen hin und 2 Meilen zurückgegangen wirklich entgegengesetzte Größen, so würden sie sich unbedingt und ohne Ausnahme aufheben, sowohl dann, wenn man wissen will, um wieviel man vorwärts gekommen ist, als auch dann, wenn man untersuchen will, wieviel Zeit derjenige gebraucht haben mag, der diese Wege gemacht hat. Dies nur im zunächst liegenden Fall. Die größten Inconsequenzen zeigen sich erst in dem Gebiete der Analysis.

Zahl die Einheit (die Benennung) zur Seite, so hat man die unbenannte (abstrakte, absolute) Zahl, die auch immer eine ganze Zahl seyn muß.

Die unbenannte Zahl (Zahl schlechthin) ist also der abstraktere und höhere Begriff; die benannte Zahl oder die Größe dagegen der zusammengesetztere und niedrigere. Die Zahlenlehre steht daher über der Größenlehre; die Zahlenlehre ist der allgemeinste und umfassendste Theil der Mathematik; die Größenlehre ein mehr specieller Theil derselben Wissenschaft. — In der Zahlenlehre kann von Größe nicht die Rede seyn, obgleich diese Zahlenlehre alles umfaßt, was man bis jetzt unter dem Namen Analysis kennt.

2.

Die Betrachtung der (absoluten, ganzen) Zahl führt zur Wahrnehmung der 3 direkten Operationen: Addiren, Multipliciren und Potenziren; und jede derselben hat 2 indirekte Operationen in ihrem Gefolge, nehmlich die beiden Subtraktionen (welche sich durch nichts unterscheiden, weil $a+b=b+a$), die beiden Divisionen (welche ebenfalls in eine und dieselbe zusammenfallen, weil $a.b=b.a$ ist) und die beiden mit dem Potenziren den Gegensatz bildenden Operationen, nehmlich die Radikation (das Wurzeln) und das Logarithmiren (Verbindung zum Logarithmen).

Die allgemeine Zahlenlehre (Algebra, Analysis) beschäftigt sich nicht mit einzelnen Zahlenresultaten, sondern mit dem Verhalten der eben genannten 7 Operationen gegen einander. — Um dieses Verhalten der Operationen zu schematisiren und durch diese Anknüpfung an äußere Gegenstände zu versinnlichen und in ihren verzweigtesten Modifikationen anschaulich zu machen, drücken wir diese Operationen (die Operationen selbst und nicht ihre Resultate) durch Zeichen aus, und zwar durch die Zeichen

$$a+b,\ a-b,\ a.b,\ \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad a:b,\ a^b,\ \sqrt[b]{a} \quad \text{und} \quad a?b$$

oder $\log^{b}.a$, wo a und b weder Zahlen noch Größen sind, sondern nur die Träger, an denen die Verbindung (Operation) zweier zu einem dritten sinnlich erkennbar gemacht wird.

In dem ursprünglichsten Falle, wo a und b (absolute, ganze) Zahlen sind, wird $a+b$ selbst jedesmal eine Zahl vorstellen; nicht so jedesmal $a-b$. — Das allgemeine (abstrakte) Auffassen der Subtraktion, in dem Zeichen $a-b$ versinnlicht, führt daher zunächst zu der Differenz $a-b$ zweier (ganzen) Zahlen, in welchem Begriffe die ganze Zahl selbst enthalten ist (wenn $a>b$), auch die Differenz, welche uns den Begriff der Null liefert (wenn $a=b$), und diejenige Differenz, in welcher $a<b$ ist. — Aus diesen einfachen Begriffen $a-a$ oder 0 (Null) und den der allgemeinen Addition und Subtraktion $a+b$, $a-b$, ergeben sich dann sogleich die zusammengesetzten Begriffe

$0+b$ oder kürzer geschrieben $+b$

und

$0-b$ oder kürzer geschrieben $-b$,

welche wir unter dem Namen der entgegengesetzten Größen so lange Zeit hindurch zu behandeln uns gewöhnt haben, welche aber nichts weiter sind, als wie sie sich so eben ergeben haben, durch mehrfach auf einander gefolgte Addition und Subtraktion zusammengesetzte Zahlenbegriffe.

3.

Um nun den Gegensatz zwischen der Addition und der Subtraktion ganz allgemein zuerst in seiner einfachsten Gestalt, dann aber auch in seinen verzweigtern und verzweigtesten Modifikationen aufzufassen, jedoch immer im Bereiche der Begriffe zu bleiben, betrachte man diesen Gegensatz zunächst für den Fall, daß in den Summen $a+b$ und in den Differenzen $a-b$, a und b zunächst absolute (ganze) Zahlen vorstellen und zwar solche, für welche jede der Differenzen $a-b$ selbst eine (absolute, ganze) Zahl vorstellen muß. Unter dieser Voraussetzung wird man den gedachten Gegensatz leicht ausgesprochen und schematisirt erhalten in den Formen

$(a-b)+b=a$; $(a+b)-b=a$;
$(a+b)-c=(a-c)+b$; $a-(b+c)=(a-b)-c$;
$a-(b-c)=(a-b)+c$; etc. etc. etc.;

so wie man sich in den Sätzen,

1) wenn $a=b$ und $b=c$, so ist auch $a=c$;

2) wenn $a=b$, so ist auch $a\pm m=b\pm m$, $m\pm a=m\pm b$, etc. etc., die Mittel leicht verschafft, diesen Gegensatz und diese Beziehungen zwischen Addition und Subtraktion beliebig weit zu verfolgen; alles jedoch für den vorgedachten Fall einer speziellern Bedeutung von $a+b$ und $a-b$, entwickelt.

Indem man nun von der Bedeutung der einzelnen Buchstaben sowohl als auch der zusammengesetzten Ausdrücke ganz abstrahirt, und alles nur der Form nach bestehen läßt, hat man denselben Gegensatz und dieselben Beziehungen in der allgemeinsten Gestalt, und man hat nur darauf zu sehen, daß bei diesem letztern allgemeinen Auffassen die übrigen darin enthaltenen speziellen Resultate mit frühern nicht im Widerspruche stehen können, um jedesmal sicher zu seyn, das allgemeine wirklich und ganz rein aufgefaßt zu haben.

Weil aber, während man vom Begriffe der (absoluten, ganzen) Zahl zu dem Addiren und Subtrahiren übergegangen ist, außer der (absoluten, ganzen) Zahl noch nichts weiter vorhanden war, so kann das, was für (absolute, ganze) Zahlen gilt, allgemeiner aufgefaßt, mit nichts im Widerspruche stehen.

Und weil das allgemeine abstrakte Auffassen gerade darin besteht, daß man jene Formeln der Form nach beibehält, aber von ihrer speziellen Bedeutung (in ganzen Zahlen) abstrahirt, so folgt eben daraus die praktische Regel,

mit jeder angezeigten Addition oder Subtraktion genau so zu operiren (d. h. der Form nach genau so zu verfahren), wie wenn sie wirklich eine speziellere Bedeutung (in ganzen Zahlen) hätte.

4.

Ganz auf dieselbe Art wird man aber verfahren, um den Gegensatz zwischen der Multiplikation und Division, und ihre Beziehungen sowohl unter sich, als auch zu den beiden vorhergehenden Operationen ganz allgemein aufzufassen und zu fixiren. Ein Unterschied liegt nur jetzt darin, daß eben durch das allgemeine Auffassen der Differenz $a-b$, auch wenn man ursprünglich von (absoluten, ganzen) Zahlen ausgeht, außer der (absoluten, ganzen) Zahl auch noch die 0 (Null) und die subtraktive ganze Zahl $[a-(a+C)=0-C=-C]$ eingegangen ist, welche 3 Begriffe jedoch in dem einzigen $a-b$, der Differenz zweier (ganzen) Zahlen zusammengefaßt werden können.

Man wird daher den Gegensatz zwischen der Multiplikation und der Division und die Beziehungen dieser Operationen unter sich und zu den vorhergehenden beiden, zunächst für den speziellen Fall aufsuchen, daß alle Buchstaben und alle zusammengesetztern Ausdrücke, die obigen Differenzen zweier (ganzen) Zahlen vorstellen (d. h. entweder eine ganze Zahl, oder Null, oder eine subtraktive ganze Zahl). Diese werden sich leicht ausgesprochen und schematisirt finden, zunächst am einfachsten in den Formen

$$\frac{a}{b}.b=a; \qquad \frac{a.b}{b}=a;$$

$$(a\pm b).m=am\pm bm; \qquad a.b=b.a;$$

$$(a.b).c=(a.c).b; \quad \text{etc. etc. etc.}$$

$$\frac{a\pm b}{m}=\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}; \qquad \frac{a.b}{m}=\frac{a}{m}.b=a:\frac{m}{b};$$

$$\frac{a}{bm}=\frac{a}{b}:m; \qquad \frac{a}{b}:m=\frac{a}{m}:b;$$

$$a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c}; \qquad \frac{a}{b}\pm c=\frac{a\pm bc}{c};$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$ u. s. w. f.,

während die Sätze:

wenn $a = b$, so ist auch $a.m = b.m$

und auch $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ und $\frac{m}{a} = \frac{m}{b}$ *)

in Verbindung mit den frühern ähnlichen Sätzen, diese Modifikationen beliebig weit und in's unendliche fortzuführen verstatten.

Indem man zuletzt von der oben vorausgesetzten speziellern Bedeutung der Buchstaben und der aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke abstrahirt, und alles nur der Form nach beibehält, hat man denselben Gegensatz und dieselben Beziehungen der Operationen gegeneinander ganz allgemein aufgefaßt und dabei nicht zu fürchten, daß spezielle Erscheinungen mit frühern im Widerspruche sein werden, weil früher nichts anders vorhanden war, als die Differenz zweier ganzen Zahlen, für diese aber dasselbe (Operiren) vorher strenge und beständig im Bereiche der Begriffe und im Einzelnen und Anschaulichen bleibend, entwickelt worden war.

Und weil bei diesem allgemeinen Auffassen des Gegensatzes und der Beziehungen der Operationen des Multiplicirens und des Dividirens unter sich und mit den frühern Operationen, alles der Form nach beibehalten wurde, so folgt noch überdies daraus die praktische Regel,

mit jeder angezeigten Multiplikation und Division genau so zu operiren (d. h. der Form nach genau so zu

---

*) Eine genaue Zergliederung zeigt eine Ausnahme, in Bezug auf die Gültigkeit dieser Sätze, die darin besteht, daß keiner der Divisoren 0 (Null) seyn darf. In den Anwendungen, wo zufällig den allgemeinen Ausdrücken solche Werthe gegeben werden können, welche einen oder mehre der Divisoren zu Null machen, ist diese Ausnahme wohl zu berücksichtigen, wenn nicht sogenannte paradoxe Resultate erscheinen sollen.

verfahren), wie wenn sie wirklich eine speciellere Bedeutung (in Differenzen ganzer Zahlen, oder in ganzen Zahlen selbst) hätten; und nur dann die allgemeinen Resultate nicht mehr gelten zu lassen, wenn irgendwo bei Ertheilung specieller Werthe, Divisoren sich ergeben sollten, die Null sind. Und auch für diesen letztern Ausnahmfall bleibt alles doch noch so weit gültig, als noch nicht durch Null dividirt worden ist. *)

5.

Daß in diesen allgemeinen Formen die speciellen Resultate

$$a \pm 0 = a; \qquad 0 . a = a . 0 = 0; \qquad \frac{0}{a} = 0;$$

$$a + (-b) = a - b; \qquad a - (-b) = a + b;$$

$$+ (-b) = -b; \qquad - (-b) = +b = b;$$

$$a . (-b) = (-b) . a = -a . b;$$

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b};$$

$$(-a) . (-b) = a . b = ab; \qquad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{ u. s. w. f.}$$

bereits enthalten sind und nicht neue Ansichten oder neue Wendungen nöthig machen, fällt von selbst in die Augen. — Es enthalten aber diese Formeln dieselben vorher besprochenen Gegensätze und Beziehungen der Operationen zu einander, nur noch specieller modificirt.

6.

Durch das allgemeine Auffassen der Division in dem Schema $\frac{a}{b}$, auf den Fall angewandt, daß man ursprünglich von (absoluten, ganzen) Zahlen ausgegangen ist, und bereits zu den Dif-

---

*) Dieses letztere ergiebt sich aus einer gehörigen Zergliederung des Gegenstandes von selbst. (Vergl. Lehrbuch der Arithm. Alg. und Analys. I. Theil und Elementar-Mathematik I. Band).

ferenzen zweier (ganzen) Zahlen gekommen, also daß a und b in dem Quotienten $\frac{a}{b}$, Differenzen ganzer Zahlen vorstellen (d. h. selbst absolute ganze Zahlen, oder Null, oder oben so genannte subtraktive ganze Zahlen), erhält man noch die absoluten und die positiven und die negativen gebrochenen Zahlen, während man durch das allgemeine Auffassen der Subtraktion a—b früher bereits die positiven und die negativen ganzen Zahlen erhalten, die absolute ganze Zahl aber ursprünglich schon gehabt hat. Diese positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen, nebst der Null (alle zusammen führen den gemeinschaftlichen Namen der reellen Zahlen) sind aber, dieser Ansicht gemäß, nichts weiter, als specielle Erscheinungen der allgemein aufgefaßten (und schematisch versinnlichten) Operationen und nach den beiden praktischen Regeln der Nummern (3. und 4.) zu behandeln, so daß weder eine eigene Lehre der Brüche noch eine besondere Theorie der positiven oder negativen Zahlen erforderlich wird.

7.

Man versucht es vergebens, genau denselben Gang in Bezug auf die 3 nächsten Operationen mit demselben Erfolg zu betreten. Es käme nehmlich darauf an,

α) den Gegensatz zwischen dem Potenziren, Radiciren und Logarithmiren und die Beziehungen dieser Operationen, unter sich und mit den frühern, für den speciellern Fall aufzusuchen, daß alle Buchstaben und alle aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke, die bis jetzt erhaltenen speciellen Zahlen-Erscheinungen (d. h. reelle Zahlen ohne Ausnahme) vorstellen,

β) nachher aber diese Gegensätze und diese Beziehungen, dadurch, daß man von der speciellern Bedeutung abstrahirt und alles nur der Form nach beibehält, ganz allgemein aufzufassen;
in so ferne dann nichts erscheinen könnte im speciellen, was den früher gehabten und bereits betrachteten speciellen Resultaten irgend wie widersprechen dürfte.

So wenig aber dem letztern Verfahren (β) ein Hinderniß entgegensteht, so unausführbar zeigt sich das erstere (α); und so ergiebt sich hier die natürliche Grenzlinie zwischen der niedern und höhern Zahlenlehre, in so ferne die niedere sich nur mit den 4 erstern (elementaren) Operationen befaßt, der höhern aber auch noch diese 3 letztern (transcendenten) Operationen zukommen.

8.

Will daher der Mathematiker von nun an ferner im Bereiche der Begriffe und der Anschaulichkeit seiner Entwickelungen bleiben, so muß er von hier ab nur langsamen und behutsamen Schrittes vorwärtsschreiten. — Er definirt die ganze Potenz p^m (als ein Produckt von m gleichen Faktoren); dann die Differenz-Potenz p^m, wo $m = a - b$ und a und b ganze Zahlen und beliebig $a \gtreqless b$ ist, (als den Quotienten $\frac{p^a}{p^b}$ vorstellend); und stellt das Operiren mit Differenz-Potenzen hin, welches dann auch für ganze Potenzen (und auch für p^0, p^{-b}) gilt, während in der Definition der Differenz-Potenz die bestimmte Bedeutung von p^0, p^1 und p^{-b} enthalten ist, wenn nur b eine ganze absolute Zahl vorstellt.

Man gebraucht aber vorläufig keine anderen als diese Differenz-Potenzen (welche die ganzen in sich schließen), weil nur diese zur Zeit eine bestimmte Bedeutung haben, und nur für diese das Operiren mit Potenzen nachgewiesen worden ist.

9.

Erst nach der Behandlung der quadratischen und höhern Gleichungen, kann man die allgemeine Bedeutung $\sqrt[m]{a}$ feststellen, für den Fall daß (wie bei den Wurzeln immer gewöhnlich ist) m eine absolute ganze Zahl vorstellt, a aber ganz allgemein ist. Nachdem nehmlich sich naturgemäß ergeben hat, daß die Gleichung $x^2 = a$, im speciellen jedesmal zwei und nicht mehr

als zwei verschiedene Werthe für x liefern könne, kann man diese Radikation allgemein in dem Schema $\sqrt{a}$ auffassen, muß aber, um dem früher gehabten Besondern nicht zu widersprechen, $\sqrt{a}$ als zweideutig ansehen und behandeln, während man von der Bedeutung von a völlig abstrahirt, so daß man sich a weder als Zahl, noch weniger als Größe denkt, sondern nur als den Träger, an welchem sich hier die Radikation mit der Zahl 2 versinnlichen soll; ganz so, wie dies früher bei der Subtraktion und Division auch schon gedacht werden mußte. Indem man nun die Formeln für das Operiren mit Quadratwurzeln im allgemeinen, aber für die speziellere Bedeutung derselben (wo in $\sqrt{a}$, a reell ist, und $\sqrt{a}$ selbst zwei reelle Werthe vorstellt) entwickelt, kann man nachher von dieser speciellern Bedeutung abstrahiren, ohne mit Früherem in Widerspruch zu gerathen, und dieselben Formeln der Wurzeln enthalten dann bloß den Gegensatz dieser Quadratwurzeln zu den Potenzen, und die Beziehungen dieser Operationen zu den frühern, freilich nur in diesem speciellen Falle, wo statt der $\sqrt[m]{a}$, bloß $\sqrt{a}$ vorkommt; also wo $m=2$ ist.

Diese Aufstellung der allgemeinen Quadratwurzel führt nachher im speciellen zu den so genannten imaginären Zahlen, im Gegensatz der reellen, welche durch die frühern Operationen nach und nach eingegangen sind, d. h. zu demjenigen speciellen Falle der selbstständigen Wurzel $\sqrt{a}$, in welchem diese Wurzel keiner der frühern Zahl gleich ist, nicht reell ist. — Die imaginären Zahlen verhalten sich daher, nach dieser Ansicht zu den reellen, wie die gebrochenen zu den ganzen, oder wie die negativen zu den positiven; und es arbeitet sich mit diesen imaginären Zahlen eben so bestimmt und eben so sicher [wenn man nur die Formeln unter keiner andern Voraussetzung anwendet, als nur unter der, für welche sie entwickelt und als allgemein gültig erkannt worden sind], wie mit den gebrochenen, oder negativen Zahlen, die früher als ähnliche spe-

cielle Erscheinungen allgemein aufgefaßter und schematisirter Begriffe hervorgegangen waren.

10.

Was von der Quadratwurzel eben angedeutet wurde, kann nachher von der mten Wurzel $\sqrt[m]{a}$, genau auf demselben Wege nachgewiesen werden, so daß dadurch allgemein $\sqrt[m]{a}$ hingestellt und behandelt werden kann, wenn auch a ganz allgemein (d. h. als bloßer Träger der Radikation) gedacht wird, wenn nur m eine ganze absolute Zahl vorstellt, und die mte Wurzel selbst als mdeutig angesehen und behandelt wird, in so fern sie solches im speciellen schon ist.

11.

Und erst nach Betrachtung der unendlichen Reihen kann der Begriff der allgemeinen Potenz a^x, und des allgemeinen Logarithmen $\overset{a}{log}.x$ festgestellt werden, wo a und x abermals bloße Träger des Potenzirens und des Logarithmirens seyn sollen (d. h. ganz allgemein gedacht sind).

Die vielen merkmürdigen und genauern Resultate dieser letztern Untersuchungen würden hier am unrechten Orte stehen, und es wird deshalb auf den zweiten Theil des oben angeführten Lehrbuchs der Arithmetik und Analysis verwiesen, während Anfängern zunächst der erste Band der oben erwähnten Elementar-Mathematik empfohlen werden muß. In Bezug auf neue Resultate, welche aus diesen, etwas vollständiger behandelten Lehren hervorgehen, sind die Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik nachzulesen. *)

---

*) Aus den letztern 8 Nummern geht aber hervor, daß man der Hypothese, der Existenz der entgegengesetzten Größen, nicht bedarf, um die Erscheinungen zu erklären, welche sich uns in der Buchstabenrechnung aufdrängen; so wenig als es überhaupt, dieser Ansicht zu Folge, nöthig ist,

12.

Die Lehre der bestimmten Zahlen (besondere Zahlenlehre, Ziffernlehre u. dgl.,) ist eine Anwendung der bis jetzt angedeuteten allgemeinen Zahlenlehre, so daß also der Theil der gemeinen Rechenkunst, der sich mit den unbenannten Zahlen beschäftigt, darunter begriffen ist. (Der andere Theil der gemeinen Rechenkunst, die Lehre der benannten Zahlen, gehört nach (2.) zur Größenlehre.)

13.

Sind a und b beliebige reelle Zahlen, (d. h. positive ganze oder gebrochene, negative ganze oder gebrochene Zahlen oder Null) und ist $a-b$ positiv so ist auch, mag m positiv oder negativ seyn,

1) $(a+m)-(b+m)=a-b$, also positiv,
2) $(a-m)-(b-m)=a-b$, also positiv,
3) $(m-a)-(m-b)=b-a$, also negativ;

dagegen ist

4) $am-bm=(a-b)m$
und 5) $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$

} nur dann positiv, wenn m positiv ist, aber negativ, wenn m negativ ist.

Ist aber $A-B$ eine positive Zahl, so sagt man A sey größer wie B, oder B sey kleiner wie A, und schreibt dabei $A>B$ und $B<A$. Und umgekehrt, wenn man von zwei reellen Zahlen sagt, die eine A sey größer wie B, so will man damit nichts anders sagen als: die Differenz $A-B$ ist einer positiven Zahl gleich (besser einer absoluten) oder die Differenz $B-A$ ist einer negativen Zahl gleich.

Dann lassen sich die vorstehenden Resultate (1—5.) auch so schreiben:

---

anzunehmen, daß sich der Calcul (Algebra, Analysis, Arithmetik) mit Größen beschäftige, welche Annahme späterhin bald mehr bald weniger zu Inconsequenzen führen muß.

Ist $a > b$,

so ist auch

1) $a + m > b + m$
2) $a - m > b - m$
3) $m - a < m - b$,

mag m beliebig eine positive oder eine negative Zahl, selbst Null seyn.

Dagegen ist

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ am \gtrless bm \\ 5)\ \frac{a}{m} \lessgtr \frac{b}{m} \end{array}\right\} \text{je nachdem m positiv oder negativ ist.}$$

Letzteres ist wohl zu beachten.

14.

Ferner muß man unterscheiden, das Größere und Kleinere bei den reellen Zahlen überhaupt, wie solches (13.) so eben entwickelt worden, und dann das Größere und Kleinere der absolut genommenen Ausdrücke. — Wenn man nehmlich sagt, der Ausdruck A sey absolut genommen größer als B, so ist damit gemeint, daß A eine positive oder negative Zahl seyn könne, daß aber weder die eine noch die andere gemeint sey, sondern nur das absolute Glied derselben, d. h. die absolute Zahl, welche erst A giebt wenn man ihr das (+) oder das (−) Zeichen vorsetzt.

Ist also A eine positive Zahl, etwa $+a$, wo a eine absolute Zahl ist, oder ist A eine negative Zahl, etwa $-b$, so daß b eine absolute Zahl vorstellt, und wenn man nun sagt: A, absolut genommen, soll größer als B seyn, so ist im erstern Falle $a > B$ oder auch $A > B$,

im andern Falle dagegen

$b > B$ oder auch $-A > B$,

in so ferne jetzt, eben weil $A = -b$ ist, auch $-A = b$

seyn wird, d. h. $-A$ die positive oder absolute Zahl b vorstellen wird.

Es ist aber von zwei negativen Zahlen a und b, diejenige die größeste, welche das kleinste absolute Glied hat. — Ist z. B.

$$a = -\alpha \quad \text{und} \quad b = -\beta, \quad \text{so ist}$$

$$a - b = (-\alpha) - (-\beta) = \beta - \alpha;$$

folglich $a - b$ dann positiv, wenn $\beta - \alpha$ positiv ist, d. h. dann $a > b$, wenn $\alpha < \beta$ ist; und eben so umgekehrt.

Und die positive Zahl ist allemal größer als Null, und auch allemal größer als jede negative Zahl; in dem Sinne der (n. 13.) genommen, in welchem diese Begriffe in der Analysis immer vorkommen.

15.

Jede Gleichung zeigt bloß die Identität der Operationen in ihrer verschiedenen Folge und Verbindung, mag sie zwischen Buchstaben-Ausdrücken oder zwischen Ziffern-Ausdrücken, gegeben, d. h. mag sie eine allgemeine oder eine besondere seyn. Es giebt daher keine andere als identische Gleichungen (Identitäten), und die sogenannten algebraischen und transcendenten Gleichungen, welche man besser unter dem Namen der Bestimmungs-Gleichungen zusammenfaßt, sind nur der Form nach von den vorzugsweise sogenannten identischen verschieden, und zwar dadurch, daß einer oder mehrere der darin vorkommenden Buchstaben (die Unbekannten), bestimmte, durch die vorausgesetzte Identität der beiden Seiten der Gleichung im Allgemeinen gegebene Ausdrücke vorstellen, welche man sich statt dieser Buchstaben (statt der Unbekannten) gesetzt denken muß, wenn die Gleichung ihren Namen und ihre Bedeutung gerechtfertigt sehen soll. — Diese Ansicht der Gleichung ist aber höchst wichtig, wie sich besonders bei den Differentialgleichungen nachweisen läßt; und auch im Verlaufe dieser Schrift wird es jedesmal sehr nützlich seyn, die Gleichungen aus diesem Gesichtspunkte zu sehen.

16.

Soll daher z. B. die Gleichung

$$\text{I. } x^2+p.x+q=0$$

dem Namen der Gleichung entsprechen, so muß man sich in ihr unter x den Ausdruck $-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ vorgestellt denken, welches man so schreibt

$$\text{II. } x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

Und in so ferne diese letztere Gleichung die Auflösung der erstern genannt wird, die erstere aber jede mögliche quadratische Gleichung in sich schließt, so können wir uns in der Folge dieses Endresultats bedienen, um die Auflösung einer jeden quadratischen Gleichung sogleich hinschreiben zu können.

17.

Eben so findet sich als Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\text{III. } a.x^2+b.x+c=0,$$

diese andere

$$\text{IV. } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

und sind a, b, c, reelle Zahlen (d. h. positive oder negative ganze, positive oder negative gebrochene Zahlen oder Null (wenn nur a nicht Null ist)), so sind diese beiden Werthe von x

reell und ungleich, wenn $b^2>4ac$,
reell und gleich, wenn $b^2=4ac$,
dagegen imaginär, wenn $b^2<4ac$.

Und die beiden Werthe von x in der Gleichung

$$p.x^2+2q.x+r=0$$

sind also

reell und ungleich, wenn $q^2>pr$,
reell und gleich, wenn $q^2=pr$,
dagegen imaginär, wenn $q^2<pr$;

so oft nur p, q, r, selbst reell sind und p nicht Null ist.

18.

Soll der Ausdruck

$$p.x^2+2q.x+r$$

für jeden Werth von x in zwei Faktoren von der Form $\alpha x + \beta$ zerlegt werden, so suche man die beiden Werthe von x, welche den gegebenen Ausdruck $p.x^2 + 2q.x + r$ zu Null machen, d. h. welche in der Gleichung

$$p.x^2 + 2q.x + r = 0$$

unter x gedacht werden müssen; und hat man daraus gefunden

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - pr}}{p},$$

so findet sich leicht, für jeden Werth von x, also namentlich auch für alle diejenigen, welche $p.x^2 + 2q.x + r$ nicht zu Null machen,

$$p.x^2 + 2q.x + r =$$

$$= p.\left(x - \frac{-q + \sqrt{q^2 - pr}}{p}\right)\left(x - \frac{-q - \sqrt{q^2 - pr}}{p}\right).$$

Denn es ist

$$p.x^2 + 2q.x + r = p\left(x^2 + 2\frac{q}{p}.x + \frac{r}{p}\right).$$

Ist nun $x^2 + 2\frac{q}{p}x + \frac{r}{p} = (x - \mu)(x - \nu)$, so wird der Ausdruck $p.x^2 + 2q.x + r$ offenbar $= 0$, so oft μ, aber auch so oft ν, statt x gesetzt wird; also sind μ und ν die beiden Werthe von x, welche $p.x^2 + 2q.x + r$ zu Null machen, während $x - \mu$, $x - \nu$ als die beiden Faktoren von

$x^2 + 2\frac{q}{p}x + \frac{r}{p}$ angenommen worden sind.

19.

Werden in der quadratischen Gleichung

$$p.x^2 + 2q.x + r = 0,$$

die beiden Werthe von x durch x' und x'' vorgestellt, so ist allemal

$$x' + x'' = -\frac{2q}{p},$$

$$x'.x'' = \frac{r}{p},$$

und daraus

$$x' - x'' = \frac{2\sqrt{q^2 - pr}}{p} \quad \text{und} \quad \frac{x' - x''}{2} = \frac{\sqrt{q^2 - pr}}{p}.$$

20.

Und will man die Bedingungen kennen, welche die reellen Coefficienten p, q und r erfüllen müssen, wenn der Ausdruck

$$p.x^2 + 2q.x + r$$

für jeden reellen Werth von x, beständig fort negativ werden soll, so verwandle man

$$p.x^2 + 2q.x + r$$

in

$$p.\left(x + \frac{q}{p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{p}$$

oder in

$$p.\left(x + \frac{q}{p}\right)^2 + \frac{pr - q^2}{p};$$

und weil nun $\left(x + \frac{q}{p}\right)^2$ für jeden reellen Werth von x immer positiv oder Null werden muß, so wird der ganze Ausdruck

$$p.x^2 + 2q.x + r$$

nothwendig allemal negativ, für jeden reellen Werth von x, wenn

$$p \text{ und } \frac{pr - q^2}{p}$$

zugleich negativ sind, d. h. wenn p negativ ist und $pr > q^2$, so daß also auch immer r mit p zugleich negativ seyn muß.

Und eben so findet man, daß

$$p.x^2 + 2q.x + r$$

fortwährend positiv seyn wird, für jeden reellen Werth von x, wenn p und $\frac{pr - q^2}{p}$ zu gleicher Zeit positiv sind; d. h. wenn p positiv und $pr > q^2$ ist, wo dann auch jedesmal r positiv seyn muß.

Und ist $pr = q^2$, so hat man

$$p.x^2 + 2q.x + r = p.\left(x + \frac{q}{p}\right)^2;$$

folglich dieser Ausdruck für jeden Werth von x allemal positiv

oder allemal negativ, je nachdem p positiv oder negativ ist, mit Ausnahme desjenigen Werthes von x, welcher $x+\frac{q}{p}=0$ macht, und für welchen $p.x^2+2q.x+r$ dann selbst $=0$ wird.

21.

Ist p positiv, so ist es allemal möglich dem x einen positiven und einen negativen, aber, absolut genommen, so großen Werth zu geben, daß $p.x^2+2q.x+r$ nothwendig positiv wird; und wenn dies für einen positiven oder negativen Werth von x, wie $x=\pm\alpha$, der Fall ist, so ist solches für jeden absolut noch größern, übrigens dasselbe (+ oder —) Zeichen habenden Werth von x um so mehr der Fall, also für $x=\pm(\alpha+h)$, wo h eine beliebige absolute (positive) Zahl vorstellt.

Denn man verwandle

$$p.x^2+2q.x+r \text{ in } p.\left(x+\frac{q}{p}\right)^2+\frac{pr-q^2}{p}.$$

Der schlimmste Fall für unsre Behauptung ist nun der, wo $q^2>pr$, also $pr-q^2$ negativ ist. Dann nehme man, unter k eine beliebige absolute (positive) Zahl verstanden,

$$p.\left(x+\frac{q}{p}\right)^2-\frac{q^2-pr}{p}=k$$

also
$$\left(x+\frac{q}{p}\right)^2=\frac{q^2-pr}{p^2}+\frac{k}{p}=\frac{q^2-pr+pk}{p^2},$$

$$x+\frac{q}{p}=\pm\frac{1}{p}\sqrt{q^2-pr+pk}$$

und
$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-pr+pk}}{p};$$

und jedesmal hat man solche positive und solche negative Werthe von x, welche $p.x^2+2q.x+r$ positiv machen, welchen absoluten Werth man dem k geben mag. Und jeder größere Werth von k, macht auch x, absolut betrachtet, größer, man mag sonst wiederum den positiven oder wiederum den negativen Werth von x nehmen, und immer wird der Ausdruck

$p.x^2+2q.x+r$ selbst $=k$, d. h. selbst noch größer und positiv.

22.

Und ist p negativ, so folgt auf demselben Wege, daß man x jedesmal positiv und negativ und so groß nehmen könne, daß $p.x^2+2q.x+r$ jedesmal negativ wird; und daß, wenn für $x=\pm\alpha$ dies der Fall ist, solches dann für jeden absolut noch größern Werth $x=\pm(\alpha+h)$ um so mehr der Fall seyn werde.

Ist aber $p=0$, so reducirt sich der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ bloß auf $2q.x+r$; und wenn dann q positiv ist, so kann man x so groß positiv nehmen, daß $2q.x+r$ positiv wird, aber auch so groß negativ, daß $2q.x+r$ negativ wird, in so ferne man nur $x=\frac{\pm k-r}{2q}$ nehmen darf, und für k irgend einen absoluten Werth setzen, weil solcher $2q.x+r=\pm k$ macht. Ist aber q negativ, so wird man x so groß, aber negativ nehmen können, daß $2q.x+r$ positiv wird, während x sehr groß positiv genommen, denselben Ausdruck $2q.x+r$ negativ machen wird. Und so oft ein Werth von x, das eine oder das andere bewirkt, so leistet der absolut gedachte, noch größere Werth von x, mit demselben (+ oder —) Zeichen versehen, allemal dasselbe.

23.

1. 1.) Sind p, q, r, beliebig reelle Zahlen, so wird der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ allemal nothwendig reell, so oft dem x irgend ein reeller Werth beigelegt wird. Denkt man sich nun x von 0 an stetig wachsend bis ins Unendliche, oder von 0 an stetig abnehmend, so werden auch die Werthe von $p.x^2+2q.x+r$ stetig sich ändern, wenn auch nicht gerade fortwährend wachsen, oder fortwährend abnehmen, sondern sie können dabei wachsen, auch abnehmen, und zwar abwechselnd. Wenn aber für $x=\alpha$ der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ po-

sitiv, und für $x=\beta$ derselbe Ausdruck negativ geworden ist, so muß während x von α zu β (oder von β zu α) überging, für einen dazwischen liegenden Werth von x (zwischen α und β) $p.x^2+2q.x+r$ zu Null geworden seyn.

2. 2.) Derselbe Satz gilt nicht umgekehrt: Wenn für einen reellen Werth von x, etwa für $x=\gamma$, der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ zu Null wird, so wird für die beiden nächstanliegenden Werthe von x, derselbe Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ nicht nothwendig verschiedene (+) oder (—) Zeichen haben müssen; z. B. wenn $pr=q^2$, also

$p.x^2+2q.x+r=p\left(x+\frac{q}{p}\right)^2$ ist, wo für $x=-\frac{q}{p}$ dieser Ausdruck zwar zu Null wird, für jeden andern reellen Werth von x aber allemal mit p einerlei (+ oder —) Zeichen erhält.

3. 3.) So oft aber zwei verschiedene und reelle Werthe von x, etwa $x=\alpha$ und $x=\beta$ existiren, welche den Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ zu Null machen, so oft ist $q^2>pr$ (nach nn. 16. 17.) und eben so oft kann dann der gedachte Ausdruck, nicht für jeden Werth von x allemal positiv oder allemal negativ werden (nach 20.). Es wird also dann für sehr große Werthe von x (im absoluten Sinne genommen), sie mögen übrigens positiv oder negativ seyn, z. B. für $x=+\gamma$ und $x=-\delta$ der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ mit p jedesmal einerlei Zeichen haben; für gewisse zwischen $+\gamma$ und $-\delta$ liegende Werthe dagegen, das entgegengesetzte Zeichen annehmen müssen. Und wendet man daher den indirekten Beweis an, so überzeugt man sich aus (1. 1.) sehr bald, daß das letztere nur für alle die Werthe von x der Fall seyn werde, welche zwischen den beiden Werthen α und β oder $\frac{-q+\sqrt{q^2-pr}}{q}$ und $\frac{-q-\sqrt{q^2-pr}}{p}$ liegen; während α und β selbst, nothwendig zwischen $+\gamma$ und $-\delta$ liegen müssen.

Denn gesetzt, es erhielte der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ für einen Werth von x, der nicht zwischen diesen oben bezeichneten Grenzen α und β liegt, etwa für $x=\varepsilon$, ein mit dem von p verschiedenes (+ oder —) Zeichen, so müßte ja eben nach (1.1.) zwischen ε und $+\gamma$ und auch zwischen ε und $-\gamma$ noch jedesmal ein Werth von x liegen, welcher $p.x^2+2q.x+r$ zu Null macht; und entweder der erstere oder doch der andere könnte nicht mit α oder β zusammenfallen, weil ε nicht zwischen α und β liegen soll, in so ferne

$$+\delta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \text{und} \quad -\delta,$$

der Größe nach auf einander folgen, also ε entweder so

$$+\delta, \quad \varepsilon, \quad \alpha, \quad \beta, \quad -\delta$$

oder so $+\delta, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \varepsilon, \quad -\delta$

liegend gedacht worden ist.

24.

Aus jeder positiven Zahl läßt sich die Quadratwurzel ausziehen, d. h. es läßt sich allemal eine positive (und dann auch eine negative, also jedesmal eine reelle) Zahl angeben, welche mit sich selbst multiplicirt, die positive Zahl wieder gibt. Diese Wurzel ist dabei rational oder irrational, d. h. sie ist entweder eine bestimmte und völlig ausgedrückte ganze oder gebrochene Zahl, oder sie ist eine solche gebrochene Zahl, welche zwar ebenfalls völlig bestimmt, aber deshalb nicht vollständig angebbar ist, weil ihr Zähler und ihr Nenner unendlich groß gedacht werden müssen.

Es hat also $\sqrt{p.x^2+2q.x+r}$, wenn p, q und r als gegebene reelle Ziffernwerthe betrachtet werden, für jeden Werth von x, welcher $p.x^2+2q.x+r$ positiv macht, einen bestimmten und angebbaren reellen Werth. — Man konnte aber verlangen, während x noch ganz allgemein ist, also jeden möglichen Werth haben kann (oder nach unsrer obigen Ansicht, ein bloßer Träger der Form ist, welche die Art der Zusammensetzung ausspricht) einen Ausdruck von der Form $\alpha.x+\beta$ zu finden,

welcher der Wurzel $\sqrt{p.x^2+2q.x+r}$ identisch ist. — In diesem Falle müßten α und β so gefunden werden, daß

$$\sqrt{p.x^2+2q.x+r}=\alpha.x+\beta$$

oder $$p.x^2+2q.x+r=(\alpha.x+\beta)^2$$

oder $$p.x^2+2q.x+r=\alpha^2.x^2+2\alpha\beta.x+\beta^2$$ wird.

Man dürfte also nur α und β so nehmen, daß

1) $p=\alpha^2$, 2) $q=\alpha\beta$ und 3) $r=\beta^2$, also

daß $\alpha=\sqrt{p}$ und $\beta=\frac{q}{\alpha}=\frac{q}{\sqrt{p}}$ ist; wo dann aber, weil $r=\beta^2$ seyn müßte, die Gleichung $r=\frac{q^2}{p}$ oder $pr=q^2$ übrig bliebe, als eine Bedingungsgleichung, die zwischen den Coefficienten p, q und r erfüllt seyn muß, wenn $\sqrt{p.x^2+2q.x+r}$ allgemein und ohne dem x einen bestimmten Werth beizulegen, einem Ausdruck von der Form

$$\alpha.x+\beta\left(\text{jetzt } \sqrt{p}.x+\frac{q}{\sqrt{p}}\right)$$

gleich seyn soll.

25.

Man konnte dasselbe aus (18.) ableiten. Da nehmlich in der Gleichung der (n. 18.) der Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ in zwei Faktoren von der Form $\alpha.\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ zerlegt worden ist, so durfte man nur die Bedingung suchen, unter welcher jene beiden Faktoren einander gleich werden. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $q^2=pr$ ist, und man hat unter dieser Voraussetzung aus (n. 18.) $p.x^2+2q.x+r=p.\left(x+\frac{q}{p}\right)^2$,

also $$\sqrt{p.x^2+2q.x+r}=\sqrt{p}.\left(x+\frac{q}{p}\right),$$

wie solches vorhin eben so gefunden worden.

Im Falle sich $\sqrt{p.x^2+2q.x+r}$ allgemein und ohne dem x einen bestimmten Werth zu geben, auf die Form

$\alpha.x+\beta$ oder $\sqrt{p}.\left(x+\frac{q}{p}\right)$ bringen läßt, was nur dann der Fall ist, wenn $q^2=pr$ seyn sollte, so sagt man, es lasse sich $\sqrt{p.x^2+2q.x+r}$ rational ausdrücken (im Allgemeinen).

26.

Wir haben in der vorhergehenden Nummer, der Gleichung

$$p.x^2+2q.x+r=\alpha^2.x^2+2\alpha\beta.x+\beta^2$$

dadurch genügt, daß wir $\alpha^2=p$, $\alpha\beta=q$ und $\beta^2=r$ annahmen und wir durften dies auch so machen, weil der Erfolg das Verfahren rechtfertigt, in so ferne nehmlich in der That die beiden Seiten der obigen Gleichung durch diese Annahme identisch werden.

Um aber zu wissen, ob dies die einzige Art ist, auf welche die gedachten beiden Ausdrücke identisch gemacht werden können, muß man noch folgende Untersuchungen vorausgehen lassen.

Ist gegeben die Gleichung $a.x+b=c.x+d$, so kann man einmal nach dem Werthe von x fragen, für welchen diese Gleichung, während a, b, c, d, alle möglichen Werthe haben können, identisch wird; dann aber kann man auch nach den Werthen von a und b, c und d fragen, wenn diese Gleichung für jeden möglichen Werth von x identisch werden soll. — Im erstern Falle wird die Gleichung nach x aufgelöst und gibt

$$x=\frac{b-d}{c-a} \quad \text{oder} \quad x=\frac{d-b}{a-c}$$

als denjenigen Werth von x, für welchen die Gleichung $a.x+b=c.x+d$ identisch wird, welche Werthe übrigens unter a, b, c und d gedacht werden mögen.

Sollen aber die Werthe von a, b, c und d gesucht werden, für welche die Gleichung $a.x+b=c.x+d$ identisch werden muß für jeden Werth, welcher dem x beigelegt werden mag, so findet man $b=d$ und $a=c$.

Denn wäre nicht $b=d$, so könnte die Gleichung $a.x+b=c.x+d$ nicht für den Fall existiren, daß $x=0$

gesetzt würde. Und ist $b=d$, so ist $a.x=c.x$ für jeden Werth von x, also auch für jeden Werth von x, der nicht Null ist; also auch, wenn man durch x wegdividirt, $a=c$.

27.

Man kann auch die Gleichung $a.x+b=0$ geben, und man wird finden $x=-\frac{b}{a}$, wenn nach dem Werth von x gefragt wird, für welchen die gegebene Gleichung identisch wird, welche Werthe auch a und b vorstellen.

Man wird aber finden $b=0$ und $a=0$, sobald nach den Werthen von b und von a gefragt wird, für welche die gegebene Gleichung $a.x+b=0$ gilt, welchen Werth man auch statt x setzen mag.

Denn $a.x+b=0$ ist nur ein besonderer Fall von $a.x+b=c.x+d$, wo nehmlich $c=d=0$ geworden ist. — Auch kann man den Beweis direkt, wie in (26.) führen.

28.

Ist $a.x^2+b.x+c=d.x^2+e.x+f$ gegeben, und man fragt nach dem Werth von x, für welchen diese Gleichung identisch wird, so darf man nur solche ordnen d. h. auf die Form

$$(a-d).x^2+(b-e).x+(c-f)=0$$

bringen, und solche quadratische Gleichung nach x auflösen; und man wird zwei Werthe von x finden, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen (wenn nur nicht $a=d$ ist).

Sollen aber die Werthe von a, b, c, d, e und f gesucht werden, damit die Gleichung

$$a.x^2+b.x+c=d.x^2+e.x+f$$

für jeden Werth von x identisch werde, so findet man

$$c=f, \quad b=e \quad \text{und} \quad a=d.$$

Denn wäre nicht $c=f$, so würde die gegebene Gleichung nicht identisch werden für $x=0$. Ist aber $c=f$, so ist

$$ax^2+bx=dx^2+ex$$

für jeden Werth von x, also auch, wenn man durch x wegdividirt, noch $ax+b=dx+e$, wenigstens für jeden Werth von x der nicht Null ist. Sind nun α und β zwei Werthe von x, die nicht Null sind, so hat man also

$$a.\alpha+b=d.\alpha+e$$

und auch $$a.\beta+b=d.\beta+e$$

also, wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt,

$$a.(\alpha-\beta)=d(\alpha-\beta)$$

oder $$a=d,$$

also auch $$b=e.$$

Man kann auch so schließen: Weil in der Algebra strenge erwiesen ist, daß die Gleichung

$$a.x^2+b.x+c=d.x^2+e.x+f$$

so oft a von d verschieden, also $a-d$ nicht Null ist, als eine quadratische, nur zwei Werthe von x gibt, die sie identisch machen, so kann solche für mehr als 2 Werthe von x nicht identisch werden, so lange a von d verschieden ist. Soll also diese gegebene Gleichung für mehr als zwei verschiedene Werthe von x identisch werden, so muß $a=d$ seyn. Dann ist aber auch

$bx+c=ex+f$ und dann auch $b=e$ und $c=f$.

29.

Dieser letztere Schluß läßt sich auch direkt auf

$$a.x^2+b.x+c=0$$

anwenden; und es kann diese Gleichung nicht für jeden Werth von x existiren, wenn nicht einzeln

$a=0$, $b=0$ und $c=0$ ist.

30.

Dieselbe Schlußweise kann man nun auch auf

$$a.x^3+b.x^2+c.x+d=e.x^3+f.x^2+g.x+h$$

anwenden, und man wird finden, daß selbige Gleichung nicht für jeden Werth von x statt finden kann, wenn nicht $a=e$, $b=f$, $c=g$ und $d=h$ ist.

Eben so findet man, daß die Gleichung

$$a.x^3+b.x^2+c.x+d=0$$

nicht für jeden Werth von x statt finden könne, wenn nicht einzeln $a=0$, $b=0$, $c=0$ und $d=0$ ist.

Dasselbe läßt sich endlich auf Gleichungen von derselben Form, aber vom beliebigen Grade ausdehnen.

31.

Ist $a.y+b.x+c=d.y+e.x+f$, so kann man nach den Werthen von x und von y fragen, welche diese Gleichung identisch machen. Weil denn die Gleichung zwei Unbekannte (x und y) enthält, so gibt sie, nach y aufgelöst,

$$y=\frac{(e-b).x+(f-c)}{a-d}$$

und der Werth von x ist willkührlich zu nehmen, wenn nur für jeden Werth von x, der zugehörige Werth von y nach dieser letztern Gleichung genommen wird.

Man kann aber nach den Werthen von a, b, c, d, e und f, fragen, damit die Gleichung

$$a.y+b.x+c=d.y+e.x+f$$

für jeden Werth von x und von y identisch werde. In diesem Falle erhellet aus (26.) daß

$$a.y+(bx+c)=d.y+(ex+f)$$

nicht für jeden Werth von y existiren könne, wenn nicht $a=d$ und $b.x+c=e.x+f$ ist. Und soll also die Gleichung auch für jeden Werth von x existiren, so muß noch $b.x+c=e.x+f$ für jeden Werth von x statt finden, d. h. es muß nach (26.) wiederum $b=e$ und $c=f$ seyn.

Es existirt also die Gleichung

$$a.y+b.x+c=d.y+e.x+f$$

nur dann für jeden Werth von x und von y, wenn $a=d$, $b=e$ und $c=f$ ist.

Ist $a.y+b.x+c=0$ gegeben, so kann man nach den

Werthen von x und y fragen, welche diese Gleichung identisch machen. Man findet durch Auflösung nach y,

$$y = -\frac{b.x+c}{a}$$

und genügt daher der obigen Gleichung, wenn man x beliebig sich denkt, dagegen für y den aus $-\frac{b.x+c}{a}$ sich ergebenden zugehörigen Werth setzt. — Oder es wird die Gleichung nach x aufgelöst, so erhält man $x = -\frac{a.y+c}{b}$; und man kann nun y beliebig sich denken, wenn man nur x aus $-\frac{a.y+c}{b}$ zugehörig bestimmt. Immer wird dann durch diese zusammengehörigen Werthe von x und y der Gleichung $a.y+b.x+c=0$ genügt.

Fragt man sich aber, welchen Werth die Coefficienten a, b und c haben müssen, wenn die Gleichung $a.y+b.x+c=0$ für jeden möglichen Werth von x und y identisch werden soll, so findet man $a=0,\ b=0,\ c=0$; entweder direkt wie vorher verfahrend, oder diesen Fall als den besondern des vorhergehenden ansehend, in welchem $d=e=f=0$ ist.

32.

Soll die Gleichung

I.) $a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$

für bestimmte Werthe von x und y statt finden und für beliebige oder gegebene Werthe der Coefficienten, a, b, c, d, e und f, so kann man sie nach y ordnen, so daß man

$$a.y^2+(b.x+d).y+(c.x^2+e.x+f)=0$$

erhält, und dann nach y auflösen, so daß sich

II.) $$y=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{(b^2-4ac).x^2+2(bd-2ae).x+(d^2-4af)}}{2a}$$

ergibt. Diese Werthe von y, unter x einen beliebigen Werth

gedacht, genügen nun der gegebenen Gleichung (wenn nur a nicht Null ist).

Soll aber dieselbe Gleichung für jeden Werth von x und y identisch werden, also zunächst für jeden Werth von y, so muß

$$a=0,\ b.x+d=0 \quad \text{und} \quad c.x^2+e.x+f=0$$

seyn; und soll sie zugleich auch für jeden Werth von x identisch werdeu, so müssen auch diese letztern Gleichungen für jeden Werth von x identisch seyn, also auch seyn, außer $a=0$, noch $b=0$, $c=0$, $d=0$, $e=0$ und $f=0$.

Und es ist nicht schwer, solche Untersuchungen auf zusammengesetztere Fälle auszudehnen.

Soll namentlich die Gleichung

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=$$
$$A.y^2+B.xy+C.x^2+D.y+E.x+F$$

für jeden Werth von x und y statt finden, so muß nothwendig seyn $a=A$, $b=B$, $c=C$, $d=D$, $e=E$, und $f=F$.

33.

Wir setzen hier durchgehends voraus, daß in allen vorkommenden Gleichungen die Coefficienten derselben als reelle Zahlen (d. h. positive ganze oder gebrochene, negative ganze oder gebrochene, oder Null) gedacht werden. Unter dieser Voraussetzung kann man sich fragen, wie müssen in der Gleichung (32. I.) die Coefficienten beschaffen seyn, damit

1) y für jeden möglichen reellen Werth von x doch allemal imaginär werde, oder

2) die Werthe von y im allgemeinen rational werden (S. n. 25.)

Und man findet aus der Auflösung (II. 32.), in Verbindung mit (20.), daß, wenn

$$(\odot)\ \ldots \begin{cases} b^2-4ac \text{ negativ, und zugleicher Zeit} \\ (b^2-4ac).(d^2-4af) > (bd-2ae)^2 \text{ ist,} \end{cases}$$

dann die Werthe von y für jeden möglichen reellen Werth von

x, imaginär werden müssen (wo dann auch jedesmal d^2-4af negativ seyn wird).

Und eben so findet man aus (20.), daß wenn

(C)..... $(b^2-4ac)(d^2-4af)=(bd-2ae)^2$ ist,

dann $\sqrt{(b^2-4ac).x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}$

$=\sqrt{b^2-4ac}.\left(x+\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}\right)$ oder auch

$=\sqrt{b^2-4ac}.x+\sqrt{d^2-4af}$,

folglich aus (32. II.):

III. $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x+\frac{-d+\frac{bd-2ae}{\pm\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}$,

wo die obern (+) Zeichen zugleich oder die untern (—) Zeichen zugleich gelten.

34.

Man kann sich auch vorlegen: den Ausdruck

$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f$

für jeden Werth von x und y in zwei Faktoren zu zerlegen von der Form $(\alpha.y+\beta.x+\gamma)(\delta.y+\varepsilon.x+\zeta)$,

oder einfacher: den Ausdruck

(A.).... $y^2+\frac{b}{a}.xy+\frac{c}{a}.x^2+\frac{d}{a}.y+\frac{e}{a}.x+\frac{f}{a}$

in zwei Faktoren von der Form

(B.).... $(y+\alpha.x+\beta)(y+\gamma.x+\delta)$ zu zerlegen.

Multiplicirt man aber die letztern Faktoren mit einander, so erhält man

(C.).... $y^2+(\alpha+\gamma).xy+\alpha\gamma.x^2+(\beta+\delta).y+(\alpha\delta+\beta\gamma).x+\beta\delta$

und da nun (A.) und (C.) identisch werden sollen, so muß man α, β, γ und δ so nehmen, (nach 32.), daß

$\alpha+\gamma=\frac{b}{a}$, $\alpha\gamma=\frac{c}{a}$, $\beta+\delta=\frac{d}{a}$,

$\alpha\delta+\beta\gamma=\frac{e}{a}$ und $\beta\delta=\frac{f}{a}$ wird.

Von diesen 5 Gleichungen dienen 4 zur Bestimmung von α, β, γ und δ, und geben

$$\alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \gamma = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\beta = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4af}}{2a} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4af}}{2a};$$

und die 5te dieser Gleichungen, nehmlich

$$\alpha\delta + \beta\gamma = \frac{e}{a}$$

gibt, wenn man statt α, β, γ, δ die eben gefundenen Werthe setzt, die Gleichung

$$bd - \sqrt{(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)} = 2ae,$$

oder $$\sqrt{(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af)} = bd - 2ae,$$

oder $$(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) = (bd - 2ae)^2;$$

und ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Zerlegung, wie sie gesucht wurde, möglich und zugleich schon verwirklicht.

Sucht man nun die Werthe von y, welche

$$a.y^2 + b.xy + c.x^2 + dy + e.x + f$$

oder $$y^2 + \frac{b}{a}.xy + \frac{c}{a}.x^2 + \frac{d}{a}.y + \frac{e}{a}.x + \frac{f}{a}$$

zu Null machen, so darf man in diesem Falle nur die Werthe suchen von y, welche den einen oder den andern der beiden Faktoren $y + \alpha x + \beta$ oder $y + \gamma x + \delta$ zu Null machen, und man findet daher entweder

$$y = -\alpha.x - \beta$$

oder

$$y = -\gamma.x - \delta,$$

welches dasselbe Resultat ist, wie wir solches (33. III.), unter derselben Voraussetzung der erfüllten Bedingungsgleichung

$$(b^2 - 4ac)(d^2 - 4af) = (bd - 2ae)^2,$$

bereits gefunden haben.

35.

Sucht man aber die Bedingungen zwischen den Coeffizienten der Gleichung (32. I.), damit die Werthe von y, für jeden

möglichen reellen Werth von x, immerdar ebenfalls reell werden mögen, so findet sich aus (20.), daß zu diesem Zwecke b^2-4ac positiv, und zu gleicher Zeit $(b^2-4ac)(d^2-4af)>(bd-2ae)^2$ seyn müsse; wo die zweite Bedingung mit der, für die entgegengesetzte erste Frage der (33.) erhaltenen, übereinstimmt.

36.

Ist daher $(b^2-4ac).(d^2-4af)<(bd-2ae)^2$ und b^2-4ac positiv, negativ oder Null, so werden die Werthe von y aus der Gleichung (32. I.) für alle möglichen reellen Werthe von x genommen, weder alle reell, noch alle imaginär seyn, sondern zum Theil reell, zum Theil imaginär; wenn auch jedesmal die beiden zu einerlei reellem Werth von x, gehörigen Werthe von y, beide zugleich reell, oder beide zugleich imaginär seyn müssen.

37.

Wollte man die Bedingungen aufsuchen, unter welchen die Gleichung (32. I.) nur einen einzigen reellen Werth von y gibt, wenn man auch statt x alle möglichen reellen Werthe setzt, so daß also nur ein reeller Werth von x existirt, für welchen auch y reell wird, während für jeden andern reellen Werth von x, y imaginär werden soll, so darf man nur nach (20.) b^2-4ac negativ und zugleich

$$(b^2-4ac)(d^2-4af)=(bd-2ae)^2$$

nehmen.

Note. Wollte man aber die Bedingungen aufsuchen, unter welchen dasselbe y für alle möglichen reellen Werthe von x, nur 2 oder irgend eine bestimmte größere Anzahl reeller Werthe hat, so daß für jeden andern reellen Werth von x, der zugehörige Werth von y allemal imaginär werden muß, so würde man finden, daß solches Verlangen eine Unmöglichkeit in sich schließt, und daß die Werthe von y aus (32. I.) entweder alle imaginär sind, oder bis auf einen einzigen imaginär, oder endlich zum Theil reell, (aber in unendlicher Menge) zum Theil imaginär, oder endlich alle reell sind; wenn nur für x alle möglichen reellen Werthe nach einander gesetzt gedacht werden.

38.

Ehe wir zu einer andern Gattung von Untersuchungen übergehen, wollen wir noch die Eintheilung der Gleichungen mit einem und mit mehren Unbekannten in algebraische und in transcendente übersichtlich darstellen.

I. Gleichungen mit einem Unbekannten x.

Diese Gleichungen lassen sich entweder auf eine der nachstehenden Formen bringen:

$$a+b.x=0$$

oder $$a+b.x+c.x^2=0$$

oder $$a+b.x+c.x^2+d.x^3=0$$

oder $$a+b.x+c.x^2+d.x^3+e.x^4=0$$

oder u. s. w. f. allgemein

$$a+b.x+c.x^2+d.x^3+....p.x^{\nu-1}+qx^{\nu}=0,$$

wo ν jede mögliche absolute ganze Zahl vorstellt; und dann nennt man sie algebraische Gleichungen, und zwar die letzte eine algebraische höhere Gleichung vom νten Grade; — oder sie lassen sich nicht auf diese Form bringen, wie z. B.

$a^x=b$; $b.\sin x+a.\cos x=c$, $a+b.\log x=c+d.x$, u. s. w. f. und dann werden sie transcendente Gleichungen genannt; d. h. nach x algebraisch, oder nach x transcendent.

II. Gleichungen mit 2 Unbekannten x und y.

Diese werden algebraische genannt, wenn sie in Bezug auf jeden Unbekannten für sich geordnet (als Gleichungen dieses einzigen Unbekannten, nach I.) algebraische seyn würden. Sie werden transcendent genannt, wenn sie in Bezug auf x allein, oder auf y allein, oder auf x und y zugleich, transcendent sind.

Die algebraischen Gleichungen zweier Unbekannten nach ihrer Ordnung sind:

1) $a.y+b.x+c=0$;
2) $a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$;
3) $a.y^3+b.xy^2+c.x^2y+d.x^3+e.y^2+f.xy+g.x^2+h.y+k.x+l=0$;
4) $a.y^4+b.xy^3+c.x^2y^2+d.x^3y+e.x^4+f.y^3+g.xy^2+h.x^2y+k.x^3+l.y^2+m.xy+n.x^2+p.y+q.x+r=0$; u. ſ. w. f.

Als tranſcendente Gleichungen zweier Unbekannten x und y, müſſen aber angeſehen werden die Gleichungen:

$$a.y^2+b.y+c.\sin x=0,$$
$$a^y+b.x^3+c.x+d=0$$

oder $a^y+b.\sin x+d=0$ u. ſ. w. f.;

obgleich die erſtere davon nach y allein algebraiſch und quadratiſch, die nächſtfolgende dagegen nach x allein algebraiſch und kubiſch iſt, während die letzte ſowohl nach x allein, als auch nach y allein als eine tranſcendente erſcheint.

III. Gleichungen mit 3 oder mehr Unbekannten.

Sie heißen algebraiſch, wenn ſie nach jedem einzelnen der Unbekannten algebraiſch ſind, nach (I.). Sie heißen tranſcendent, wenn ſie nach einem einzigen der Unbekannten (oder nach mehren oder nach allen) der (I.) gemäß, zu den tranſcendenten gerechnet werden müſſen.

39.

Außer dem, was bereits (8.) von den Potenzen geſagt worden, iſt es nöthig, ſich noch folgendes zu bemerken. Man mag nehmlich von dem Begriff der allgemeinen Potenz a^x ausgehen, wie ſolcher aus der Behandlung der unendlichen Reihen hervorgeht, oder man mag vorläufig bloß den Begriff der gebrochenen Potenz feſtſtellen wollen, ſo iſt doch immer

$$a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}, \quad \text{alſo auch} \quad a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},$$

im erſtern Fall als Folgerung aus der Definition, im andern

Falle als Definition selbst, wo jedoch $a^{\frac{1}{m}}$, so wie die mte Wurzel aus a, m deutig ist, d. h. m verschiedene Werthe vorstellt, die zum Theil reell, zum Theil imaginär seyn können.

Für diese, so wie für alle Potenzen gelten nun die Formeln:

$$\text{I. } a^m . a^n = a^{m+n}; \qquad \text{II. } a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\text{III. } a^m . b^m = (ab)^m; \qquad \text{IV. } a^m : b^m = (a:b)^m;$$

$$\text{V. } (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

und

40.

$$\text{VI. } (a+b)^m = a^m + m\,.\,a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4 + \ldots.$$

so daß namentlich aus der letztern Formel, welche gewöhnlich der binomische Lehrsatz genannt wird, noch für $m=2, 3, 4,$ etc. hervorgeht:

α) $\ldots(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

β) $\ldots(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

γ) $\ldots(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; u. s. w. f.

41.

Setzt man in (39. VI.) $\frac{1}{2}$ statt m und bemerkt man, daß $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a+b}$ (39.), so erhält man noch

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}.b + \frac{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}-1)}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{2\,.\,3}a^{-\frac{5}{2}}b^2 + \frac{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{2\,.\,3\,.\,4}a^{-\frac{7}{2}}b^3 + \ldots.$$

oder (weil $a^{-\mu} = \frac{1}{a^{\mu}}$, also auch $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$,

$a^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a}}$, u. ſ. w. f. iſt) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} - \frac{5b^4}{128a^3\sqrt{a}} + \ldots$

42.

Ein Ausdruck, welcher den Buchſtaben x enthält und welcher deshalb hinſichtlich ſeines Werthes von den verſchiedenen Werthen von x abhängt, heißt eine Funktion von x (d. h. ein von x abhängiger Ausdruck). — So iſt z. B.

$\alpha + \beta x + \gamma x^2$ oder $p.x^2 + 2q.x + r$, etc. etc.,

eine ſolche Funktion von x; ſo ſind

a^x, *sin* x, *cos* x, $a^x + b.$ *sin* x,

u. ſ. w. Funktionen von x.

Man pflegt eine Funktion von x, der Kürze wegen durch F(x), eine andere durch f(x), eine dritte durch $\varphi(x)$, eine vierte durch $\psi(x)$, u. ſ. w. zu bezeichnen.

Das, was aus einer Funktion F(x) wird, wenn man x + h ſtatt x ſetzt, pflegt durch F(x + h) vorgeſtellt zu werden, ſo daß z. B. wenn

$$F(x) = \alpha + \beta.x + \gamma.x^2,$$

dann $F(x+h) = \alpha + \beta.(x+h) + \gamma.(x+h)^2$

oder $= \alpha + \beta x + \beta h + \gamma x^2 + 2\gamma xh + \gamma h^2$

oder $F(x+h) = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) + (\beta + 2\gamma x).h + \gamma.h^2$ iſt.

In der letztern Form wird alſo unter F(x + h) eine, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende (3gliedrige) Reihe verſtanden (welche auch als eine unendliche Reihe betrachtet werden kann, in ſo ferne man ſich noch unendlich viele Glieder von der Form $0.h^3 + 0.h^4 + 0.h^5 + 0.h^6 +$ etc. etc. hinzugefügt denken darf, weil ſie alle der Null gleich ſind).

43.

Es ſey $Fx = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ gegeben. Man ſoll

$F(x+h)$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln.

Man hat zuerst nach (42.)

$$F(x+h)=\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)+(\beta+2\gamma x)h+\gamma h^2}.$$

Setzt man daher in der Formel (41.)

	$\alpha+\beta x+\gamma x^2$	statt	a
und	$(\beta+2\gamma x)h+h^2$	statt	b

so erhält man:

$$F(x+h)=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{(\beta+2\gamma x)h+\gamma h^2}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$
$$-\frac{[(\beta+2\gamma x)h+\gamma h^2]^2}{8(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\text{ etc. etc. etc.}$$

Entwickelt man aber hier in allen Gliedern die Zähler nach (40. α, β, γ, etc.) und nimmt man zuletzt alle die Glieder zusammen, die mit einerlei Potenz von h multiplicirt sind, so erhält man zuletzt

$$F(x+h)=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{\beta+2\gamma x}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}h+$$
$$+\frac{4\gamma(\alpha+\beta x+\gamma x^2)+(\beta+2\gamma x)^2}{8(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.h^2+\text{ etc. etc. etc.}$$

44.

So wie in diesen beiden Fällen, wo einmal $F(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ und dann $F(x)=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ war, $F(x+h)$ allemal nach ganzen Potenzen von h in eine Reihe verwandelt werden konnte, so ist dies in allen Fällen möglich, so daß, wie auch die Funktion $F(x)$ gedacht werden mag, doch allemal $F(x+h)$ einer nach ganzen Potenzen von h fortgehenden Reihe gleich ist, deren erstes Glied $F(x)$ selber seyn muß, weil für $h=0$, eine solche Reihe auf ihr erstes Glied, dagegen $F(x+h)$ auf $F(x)$ sich reducirt, während die Identität von $F(x+h)$ und der gedachten Reihe für jeden Werth von h, also auch für $h=0$ noch statt finden muß.

Die Coeffizienten dieser unendlichen Reihe, in welche $F(x+h)$ verwandelt werden kann, sind offenbar von $F(x)$ selbst abhängig, so daß wir sie durch $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ etc. bezeichnen können, während sie im allgemeinen völlig unbekannt sind und in jedem gegebenen Falle, so wie in (42. und 43.) gesehen worden, auf den geeigneten Wegen erst gefunden oder entwickelt werden müssen.

Man hat also allemal, welche Funktion von x durch $F(x)$ vorgestellt seyn mag,

$$F(x+h)=F(x)+F_1(x).h+F_2(x).h^2+F_3(x).h^3+....$$

oder auch

$$F(x+h)=F(x)+F'(x).h+F''(x).\frac{h^2}{1.2}+F'''(x).\frac{h^3}{1.2.3}+...$$

wenn man nehmlich z. B. unter $F'''(x)$, das obige $F_3(x)$, aber noch mit $1.2.3$ multiplicirt sich denkt.

Ist also z. B.

$$F(x)=A.x+B,$$

so ist

$$F(x+h)=A.(x+h)+B$$
$$=(A.x+B)+A.h$$

und es ist also für dasmal

$$F'(x)=A,\quad F''(x)=F'''(x)=\text{etc. etc.}=0.$$

Ist aber

$$F(x)=\sqrt{A.x+B},$$

so ist

$$F(x+h)=\sqrt{(Ax+B)+Ah},$$

oder nach (35.), wenn man $(A.x+B)$ statt a und Ah statt b setzt:

$$F(x+h)=\sqrt{Ax+B}+\frac{A}{2\sqrt{Ax+B}}.h-\frac{A^2}{8\sqrt{Ax+B^3}}.h^2$$
$$+\frac{A^3}{16\sqrt{Ax+B^5}}.h^3-\frac{5A^4}{128\sqrt{Ax+B^7}}.h^4+....$$

und hier ist also

$$F'(x)=\frac{A}{2\sqrt{Ax+B}},\quad F''(x)=-\frac{A^2}{4\sqrt{Ax+B^3}}$$

$$F'''(x) = \frac{3A^3}{8\sqrt{Ax+B}^5}, \quad F^{IV}(x) = -\frac{15A^4}{16\sqrt{Ax+B}^7},$$

u. s. w. f

45.

In jeder unendlichen Reihe von der Form

$$A_0 + A_1.h + A_2.h^2 + A_3.h^3 + A_4.h^4 + \ldots.$$

ist es allemal möglich (so lange nur nicht die Coefficienten A_0, A_1, A_2, A^3 etc. ins Unendliche wachsen, sondern der größeste doch noch immer einen endlichen Werth C hat), dem h einen so kleinen Werth zu geben, daß das absolut genommene erste Glied A_0 größer wird, als die Summe aller übrigen Glieder der Reihe ebenfalls absolut genommen.

Und wenn dies für irgend einen Werth von h der Fall ist, so findet solches um so eher für jeden noch kleinern Werth von h statt.

Der Beweis dieses Satzes dreht sich um mehre Hauptpunkte herum, die wir einzeln hieher setzen wollen;

α) die Reihe $1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + \ldots. + h^n$

als eine geometrische Reihe summirt, gibt

$$\frac{h^{n+1}-1}{h-1} \text{ oder } \frac{1-h^{n+1}}{1-h} \text{ oder } \frac{1}{1-h} - \frac{h^{n+1}}{1-h}.$$

β) So wie $h<1$ ist, findet sich daraus, wenn n unendlich groß gedacht wird, die Summe der unendlichen Reihe:

$$1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + h^5 + \ldots. = \frac{1}{1-h},$$

weil für $h<1$ z. B. $h = \frac{1}{1+p}$, wo p noch so klein aber absolut werden kann,

$$h^{n+1} = \frac{1}{(1+p)^{n+1}} = (\text{nach } 40.) \frac{1}{1+(n+1)p + \text{etc. etc. etc.}}$$

wird, also verschwindet, so wie n unendlich groß gedacht wird.

γ) Ist nun C der größeste der Coefficienten

$$A_1, \; A_2, \; A_3, \; A_4, \; \text{etc. etc. etc.},$$

so ist offenbar, wenigstens so lange h positiv oder absolut gedacht ist, die Summe der unendlichen Reihe

$$A_1 + A_2 . h + A_3 . h^2 + A_4 . h^3 + \ldots,$$

kleiner, als die Summe der unendlichen Reihe

$$C + Ch + Ch^2 + Ch^3 + Ch^4 + \ldots,$$

also kleiner als $\frac{C}{1-h}$, jede dieser Summen absolut genommen.

Also ist auch, wenn auf beiden Seiten mit h multiplicirt wird, die Summe der Reihe

$$A_1 . h + A_2 . h^2 + A_3 . h^3 + A_4 . h^4 + \ldots,$$

kleiner als $\frac{Ch}{1-h}$, jedes absolut genommen.

δ) Und da man nun h offenbar klein genug nehmen kann, so daß $\frac{Ch}{1-h}$ absolut genommen, kleiner als irgend eine gegebene Zahl A_0 werden kann, so folgen die obigen Behauptungen ohne weiteres.

46.

Aber eben deshalb kann man nun auch h klein genug nehmen, daß A_1 größer wird, als die Summe aller übrigen Glieder der Reihe $A_1 + A_2 . h + A_3 . h^2 + A_4 . h^3 + \ldots.$, sowohl A_1 als die letztern Summen absolut genommen. Und dann, wenn man auf beiden Seiten mit h, h^2, h^3, etc. etc. multiplicirt, so daß die Reihen

$$A_1 . h + A_2 . h^2 + A_3 . h^3 + A_4 . h^4 + \ldots.$$

oder $$A_1 . h^2 + A^2 . h^3 + A_3 . h^4 + A_4 . h^5 + \ldots.$$

oder $$A_1 . h^3 + A_2 . h^4 + A_4 . h^5 + \ldots.$$

erhalten werden, folgt, daß man auch jedesmal h so klein nehmen könne, daß in jeder der letztern Reihen, das erste Glied absolut genommen, ebenfalls größer wird, als die absolut genommene Summe aller übrigen Glieder derselben Reihe.

Oder allgemein: In jeder nach steigenden Potenzen von h fortlaufenden Reihe kann man h immer klein

genug nehmen, so daß das absolut genommene erste Glied der Reihe, größer wird, als die absolut genommene Summe aller übrigen Glieder derselben Reihe.

Und namentlich muß dies also der Fall seyn, so oft h im Moment des Verschwindens gedacht wird.

47.

Daraus folgt aber weiter: In jeder Reihe die nach steigenden Potenzen von h fortgeht, ist, sobald man sich h im Moment des Verschwindens denkt, die Summe der ganzen Reihe nothwendig eine positive Zahl, wenn das erste Glied derselben positiv ist, und nothwendig eine negative Zahl, wenn das erste Glied derselben eine negative Zahl seyn sollte; d. h. das (+) oder (—) Zeichen der Summe der ganzen Reihe hängt blos von dem (+) oder (—) Zeichen des ersten Gliedes derselben ab, sobald man sich h im Moment des Verschwindens denkt.

48.

Auch folgt noch aus (45. und 46.), daß die Differenz zweier solchen Reihen,

$$A_1.h + A_2.h^2 + A_3.h^3 + A_4.h^4 + \ldots,$$
und $$B_1.h + B_2.h^2 + B_3.h^3 + B_4.h^4 + \ldots,$$

für ein im Moment des Verschwinden gedachtes h desto kleiner wird, je mehr erste Glieder einander gleich werden. — So lange nehmlich A_1 von B_1 verschieden ist, ist das erste Glied der Differenz $(A_1 - B_1)h$; so wie aber $A_1 = B_1$ wird, so ist das erste Glied der Differenz $(A_2 - B_2)h^2$; daher im letztern Fall die gedachte Differenz kleiner als im erstern, u. s. w. f.

49.

Endlich folgt noch, daß wenn zwei nach ganzen steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihen einerlei erstes Glied haben, z. B.

$$\alpha)\ A_1.h+A_2.h^2+A_3.h^3+A_4.h^4+\ldots.$$

und $$\beta)\ A_1.h+B_2.h^2+B_3.h^3+B^4.h^4+\ldots.$$

so ist es nicht möglich, daß die Summe einer dritten Reihe

$$\gamma)\ C_1.h+C_2.h^2+C_3.h^3+C_4.h^4+\ldots.$$

für ein im Moment des Verschindens gedachtes h, zwischen den obigen beiden Summen liegt, (d. h. größer ist als die eine, und kleiner als die andere), wenn nicht ebenfalls ihr erstes Glied dasselbe d. h. $C_1 = A_1$ ist.

Denn gesetzt es wäre C_1 von A_1 verschieden, so würde die Differenz der beiden Reihen (α und β) mit $\pm (A_2 - B_2)h^2$ anfangen, also kleiner seyn, als die Differenzen zwischen den Reihen (α und γ) oder (β und γ), als welche mit $\pm(A_1 - C_1)h$ anfangen. Also könnte dann die Reihe (γ) nicht zwischen den beiden Reihen α und β liegen, ihrem Werthe nach; was gegen die Voraussetzung ist. Also kann unter den gemachten Voraussetzungen A_1 von C_1 nicht verschieden seyn.

Aus der Trigonometrie.

50.

Steht es fest, daß im Calkul (d. h. in der Arithmetik, Algebra, Analysis, etc.) nicht einmal Größen behandelt werden, noch weniger aber entgegengesetzte, deren Existenz hier (1.) ganz geläugnet wird, so wird die Trigonometrie einer solchen Hypothese, als die der Existenz entgegengesetzter Größen ebenfalls nicht bedürfen. Man kann aber einen doppelten Weg einschlagen und α) die Trigonometrie rein analytisch entwickeln, d. h. als reinen Theil der Zahlenlehre, ohne die Größen, also auch ohne Raumgrößen, mit hineinzubringen. Dies geschieht aber dadurch, daß man die Funktionen

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

oder die unendlichen Reihen

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc. etc.}$$

und $$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc. etc.}$$

als Gegenstände der Trigonometrie feststellt, die erstere durch *cos* x, die andere durch *sin* x bezeichnet und nun die Eigenschaften dieser Funktionen näher entwickelt. *) Daß dann *sin* x und *cos* x ganz allgemeine Zahlenbegriffe sind, welche für jeden positiven, oder negativen, oder Nullenwerth von x (und nicht bloß für jeden reellen, sondern auch für jeden imaginären Werth von x) ihre bestimmte Bedeutung haben, fällt in die Augen, so daß es

---

*) Nur definire man nicht etwa so:

1) Eine Potenz a^x ist diejenige Funktion, welche der Gleichung $a^x . a^y = a^{x+y}$ genügt.

oder 2) *sin* x ist diejenige Funktion, welche der Gleichung entspricht

$$sin(x+y) = sin\ x . \sqrt{1 - sin^2 x} + sin\ y . \sqrt{1 - sin^2 y}$$

und dgl. mehr; denn solche Definitionen sind, da sie bloße einzelne Eigenschaften der zu definirenden Funktionen feststellen, nicht geeignet, klare und bestimmte Vorstellungen zu erregen; abgesehen davon, daß, wenn man sich auch hierüber wegsetzen wollte, eine solche Definition vor allen Dingen die Untersuchung nöthig macht:

1) Gibt es wirklich solche Funktionen, oder gehören sie in die Kategorie des hölzernen Eisens? — und

2) Wievieldeutig ist das Zeichen a^x oder *sin* x, etc. etc. d. h. wie viele solche Funktionen gibt es wirklich, welche dieser Definition genügen? —

In einer bekannten Theorie der Fakultäten, wäre z. B. alles sehr schön und auch sehr richtig, wenn nur die Dinge wirklich existirten, welche der Verfasser dieser Theorie unter dem Namen der analytischen Fakultäten definirt hat. Weil aber die Definition zwei widersprechende Merkmale, dem Vfr. unbewußt, in sich aufgenommen hat, so ist die natürliche Folge, daß je schöner und je consequenter in dem Werke geschlossen wird, desto mehr sich beständig direkt widersprechende Resultate hervorgehen mußten. Aber auch dieser immer sich widerholende Widerspruch in den Resultaten blieb von dem Vfr. unbemerkt, — weil er bloß allgemeine Formeln hinstellte und sich nicht die Mühe gab, solche auch einmal hinsichtlich ihrer speciellern Erscheinungen näher kennen zu lernen.

keiner neuen Hypothese bedarf, um *sin* 0, *sin* (—x), *sin* $\frac{1}{2}\pi$, *sin* π, *sin* (π—x), *sin* (π+x), *sin* 2π, *sin* (2π—x), *sin* ($\frac{3}{2}\pi \pm$x) und dergl. mehr festzustellen. — Man gelangt aber auf diesem Wege zunächst zur analytischen Trigonometrie (gerade zu der, welche im Kalkul einzig und allein gebraucht wird) und von ihr, in der nach der Zahlenlehre folgenden Raumgrößenlehre, mittelst der durch Integration ausgemittelten Kreisbogenlänge, oder mittelst des durch Integration ausgemittelten Inhalts eines rechtwinklichen Dreiecks, zu der Ueberzeugung, daß diese analytischen Ausdrücke *sin* x, *cos* x, etc. etc. für einzelne specielle Werthe von x, als Linien im Kreise, oder im rechtwinklichen Dreieck, oder in der gleichseitigen Hyperbel (vielmehr als die Maaße dieser Linien) erscheinen, als solche benützt und, wenn man will, in diesen speciellen Fällen, durch diese Linien selbst repräsentirt werden können.

51.

Außer diesem streng wissenschaftlichen Gange, der dem consequenten Denker vollkommene Befriedigung gewährt, weil nichts unerledigt bleibt, und alles Specielle in dem gegebenen allgemeinen Begriff enthalten ist und in ihm offen darliegt, und nicht erst durch künstliche Wendungen oder gar durch Hypothesen, wie die der Existenz der entgegengesetzten Größen, hineingebracht werden muß, gibt es noch

β) den Weg, der für den ersten Unterricht vorgezogen werden muß, und welcher von den speciellen Erscheinungen ausgeht, und nach und nach (nicht vom besondern auf das Allgemeine schließt, sondern) durch Abstraktion von dem besondern zu dem Allgemeinen sich erhebt; den Weg, den wir von der Stunde unsrer Geburt an, uns selber unbewußt, verfolgen, um nach und nach unsre Ausbildung zu bewirken, mag sie auf der Stufe eines armen Fabrik-Arbeiters, der immer und ewig nur dieses eine treibt und kennen lernt, stehen bleiben, oder sich zu der Höhe erheben, von welcher aus das gesammte innere und äußere Leben,

die Vergangenheit, die Gegenwart und die Zukunft, das Diesseits und Jenseits umfaßt wird; den Weg, dessen wir uns nur recht klar bewußt werden dürfen, um ihn allenthalben und überall für unsre stufenweise Entwicklung, besonders in den untern Regionen, mit immer gleichem Erfolge betreten zu können. In Bezug auf die Trigonometrie kann dieser Weg ohngefähr auf folgende Art betreten werden.

52.

Nachdem in der allgemeinen Größenlehre nachgewiesen worden ist,

α) daß jede Größe als eine ganze oder gebrochene, aber immer absolute, benannte Zahl dargestellt werden kann; so nehmlich, daß z. B. $\frac{m}{n}$B, die Größe A vorstellt, welche entsteht, wenn der nte Theil von B, m mal genommen wird;

β) daß die absolute ganze oder gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$ das Maaß der Größe A genannt wird, in Bezug auf die Einheit (oder das Gemäß) B;

γ) daß die größere, die gleiche und die kleinere Größe, an dem größeren, gleichen oder kleinern Maaße *) erkannt wird, alle auf dasselbe Gemäß (Einheit) bezogen; daß überhaupt alle Größenbegriffe dadurch festgestellt werden, daß man sie auf die (vorher schon festgestellten, also bekannten) Zahlenbegriffe zurückführt;

δ) daß dieselbe Größe ein größeres Maaß gibt, sobald die Einheit kleiner gedacht wird; und ein kleineres Maaß gibt, wenn die Einheit (daß Gemäß) größer genommen ist;

ε) daß aber die Maaße zweier Größen A und B, durch einander dividirt, genau eine und dieselbe, absolute ganze oder

---

*) Wodurch sich aber die größern und kleinern reellen Zahlen, also auch die größern und kleinern absoluten Zahlen unterschieden und woran sie erkannt worden, ist aus (13.) zu ersehen.

gebrochene, Zahl zum Quotienten geben, man mag eine größere oder eine kleinere Einheit zu Grunde legen, wenn nur beide Größen jedesmal durch eine und dieselbe Einheit gemessen sind; — daß man deshalb auch sagen könne, die Größen A und B wären durch einander dividirt (z. B. Linien), wenn man nur diese Redensart in dem gehörigen, hier eben angedeuteten Sinne nimmt;

——— nachdem also alles dieses in der allgemeinen Größenlehre festgestellt und daher auf Linien anwendbar ist, geht man in der Geometrie oder Raumgrößenlehre von dem bei C rechtwinklichen Dreieck aus ABC (Fig. 37.), zeigt, wie die Quotienten der Seiten $\frac{BC}{AB}$ und $\frac{AC}{AB}$, wegen der Sätze der Aehnlichkeit der Dreiecke nicht von der Länge der Seiten,

$$\left(\text{es ist nemlich } \frac{B'C'}{AB'}=\frac{BC}{AB} \text{ und } \frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB}\right),$$

sondern einzig und allein von dem Winkel BAC oder x, abhängen, und bezeichnet deshalb den erstern durch *sin* x den andern durch *cos* x, so daß

sin x der Quotient ist, aus der dem Winkel x gegenüberliegenden Kathete durch die Hypothenuse, und

cos x der Quotient, aus der dem Winkel x anliegenden Kathete, durch die Hypothenuse dividirt.

Und dabei ist es ganz einerlei, mit welcher Einheit die Linien AB, AC, BC, gemessen werden, wenn nur immer paarweise mit derselben, so daß man die Hypothenuse AB selber als das Gemäß (die Einheit) annehmen kann, in welchem Falle dann das Maaß von $AB=1$, die Maaße von AC und BC dagegen als ächte Brüche erscheinen. Unter dieser Voraussetzung wird dann

$$sin\,x=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{1}=BC$$

und $$\cos x = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{1} = AC,$$ *)

wenn man nur, wie dies der eben entwickelten Ansicht zufolge seyn muß, jetzt unter BC, AC nicht die Linien selber, sondern ihre Maaße, für die Hypothenuse AB als Einheit (Gemäß) genommen, versteht; also jedesmal ächte Brüche, d. h. ächt gebrochene absolute Zahlen.

53.

Auf diese Weise steht der Begriff des Sinus und Cosinus eines jeden spitzen Winkels fest, aber kein anderer, und es kann daher von dem Sinus oder Cosinus eines rechten, stumpfen oder erhabenen Winkels, noch weniger aber von dem Sinus oder Cosinns von Null oder eines negativen Winkels (der gar nicht existirt) nicht eher die Rede seyn, als bis, was sie bedeuten sollen, durch eine neue Definition festgestellt worden.

Für spitze Winkel stellt man aber nun leicht die Hauptformeln auf, um welche sich die ganze analytische Trigonometrie beständig herumdreht, nehmlich

I. $\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

II. $\sin(x-y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

III. $\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

IV. $\cos(x-y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

und

V. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

woraus dann sogleich, noch immer für spitze Winkel hervorgehen die Formeln:

VI. $\sin 2x = 2 . \sin x . \cos x$

---

*) Man kann auch aus A als Mittelpunkt mit dem Radius AB einen Kreisbogen BD beschreiben, und unter x den Bogen BD (das Maaß desselben für AB als 1 angenommen) sich denken, in so ferne Winkel x und Bogen BD ganz von einander abhängen, und der eine durch den andern gegeben ist.

VII. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$

VIII. $\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$

IX. $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$

X. $\sin x \,.\, \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

XI. $\sin x \,.\, \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

XII. $\cos x \,.\, \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

XIII. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

XIV. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

XV. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

XVI. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \,.\, \sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$

XVII. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta - \sin^2\alpha$
$= (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\beta)$
$= (\sin\beta + \sin\alpha)(\sin\beta - \sin\alpha)$
$= \sin(\beta+\alpha) \,.\, \sin(\beta-\alpha)$,

alles unter der Voraussetzung, daß man lauter spitze Winkel habe.

54.

Aber noch bevor man aus den Formeln (I—V. 49.) die folgenden ableitet, kann man sogleich sich die Aufgabe vorlegen: Unter der Voraussetzung daß x ein spitzer Winkel ist, *sin* x und *cos* x in unendliche Reihen zu verwandeln, die nach ganzen Potenzen von x fortschreiten. — Man wird durch leichte Rechnung finden;

XVIII. $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} =$

$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

XIX. $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} =$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

sobald man nur unter x nicht mehr den Winkel selbst, sondern das Maaß des, mit beliebigem aber zum Gemäß (zur Einheit) genommenen Radius, zwischen den Schenkeln des Winkels beschriebenen Kreisbogens versteht. *)

Dann kann man die Definition des Sinus und Cosinus auf Winkel x von beliebiger Größe (rechte, stumpfe, erhabene) erweitern, indem man darunter den Werth der unendlichen Reihen in (XVIII. und XIX.) versteht, für den Fall, daß statt x, die für den Radius 1 sich ergebende Länge des zwischen den Schenkeln des Winkels beschriebenen Kreisbogens gesetzt wird. — Noch allgemeiner wird aber der Begriff des *sin* x und des *cos* x, wenn man sich die gedachten Reihen selbst darunter denkt, welche für jedes ganz allgemeine x (reell oder imaginär, positiv oder negativ oder Null) immer völlig bestimmt und gegeben sind.

Nachdem man aber auf diese Weise von geometrischen Betrachtungen, und von den durch sie erhaltenen speciellen Sinus und Cosinus ausgehend, zu diesen allgemeinern und allgemeinsten Begriffen sich erhoben hat, so kommt nun alles darauf an, daß man die Richtigkeit der Formeln (53. I. — V.) für diese allgemeinsten Sinus und Cosinus als gültig erweise, was, weil man

---

*) Man könnte sich auch die Aufgabe vorlegen: die unbestimmten Coefficienten α, β, γ so zu bestimmen, daß

$$e^{\alpha x} = \beta . cos\, x + \gamma . sin\, x$$

wird; und man würde diese Aufgabe auf eine ähnliche Weise lösen, wie die obige, und dadurch für *sin* x und *cos* x Potenz-Ausdrücke erhalten.

nur statt der Sinus und Cosinus die Potenz-Ausdrücke setzen darf, durch bloße gemeine Buchstabenrechnung entschieden wird. — Und gelten die Formeln (53. I.—V.) für jedes x und für jedes y (reell oder imaginär), so leiten sich die übrigen (53. VI.—XVII.) unmittelbar daraus ab, und sind eben so allgemeingültig; während die Formeln (XVIII. und XIX.) als Definitionen für jedes x statt finden.

Auch gehen daraus sogleich noch hervor:

$$\sin(-x) = -\sin x; \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(\alpha-\beta) = -\sin(\beta-\alpha); \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha).$$

55.

Unter der Voraussetzung, daß π die Länge des Halbkreises für den Radius 1 vorstellt, ist $\frac{1}{2}\pi$ die Länge eines Bogens von 90° und $\frac{1}{4}\pi$ die Länge eines Bogens von 45°, für den Radius 1. Und dann findet sich aus rein geometrischen Betrachtungen

$$\sin\tfrac{1}{4}\pi = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

und daraus mittelst (53. VI. und VII.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\pi = 1 \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Daraus nach denselben Formeln wiederum

$$\sin\pi = 0 \quad \text{und} \quad \cos\pi = -1,$$

so wie aus (53. I.):

$$\sin\tfrac{3}{2}\pi = -1 \quad \text{und} \quad \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0$$

und

$$\sin 2\pi = 0 \quad \text{und} \quad \cos 2\pi = 1.$$

Ist ferner $z < \frac{1}{2}\pi$ (d. h. zu einem spitzen Winkel gehörig), also der Definition gemäß $\sin z$ und $\cos z$ absolute (oder positive) ächt gebrochene Zahlen, so läßt sich jeder stumpfe

Winkel (d. h. jeder Bogen im 2ten Quadranten) *) durch $\pi - z$, jeder im 3ten Quadranten durch $\pi + z$ und jeder im 4ten Quadranten durch $2\pi - z$ ausdrücken, und man findet, aus (53. I.—IV.)

$$\sin(\pi - z) = \sin z; \quad \cos(\pi - z) = -\cos z;$$

$$\sin(\pi + z) = -\sin z; \quad \cos(\pi + z) = -\cos z;$$

$$\sin(2\pi - z) = -\sin z; \quad \cos(2\pi = z) = \cos z;$$

und man ersieht hieraus, daß die Sinus im 1ten und 2ten Quadranten (der obigen allgemeinen Definition zufolge) positive Zahlen, im 3ten und 4ten Quadranten dagegen negative Zahlen sind; während die Cosinus im 1ten und 4ten Quadranten positiv, dagegen im 2ten und 3ten Quadranten negativ seyn müssen.

56.

Ist daher ein Sinus positiv gegeben, so gehören zwei Winkel dazu, ein spitzer z und sein stumpfer Nebenwinkel $(\pi - z)$.

Ist aber ein Sinus negativ, etwa $= -\alpha$ gegeben, so muß man zu der absoluten Zahl α, als Sinus betrachtet, den spitzen Winkel z suchen, (so daß $\sin z = \alpha$), und dann sind die beiden Winkel $(\pi + z)$ und $(2\pi - z)$ im 3ten und im 4ten Quadranten die Winkel, deren Sinus $= -\alpha$, d. h. der gegebene seyn wird.

Ist dagegen ein Cosinus positiv gegeben, so gehört dazu ein spitzer Winkel z und der ihn zu 4 rechten ergänzende $2\pi - z$ im 4ten Quadranten.

---

*) Da Winkel und der dazu gehörige Bogen so genau durch einander gegeben sind, so kann man in allen diesen Untersuchungen beliebig Winkel statt Bogen, und Bogen statt Winkel setzen, ohne eine Verwirrung befürchten zu dürfen.

Und ist ein Cosinus negativ gegeben, etwa $= -\beta$, so betrachte man das absolute Glied β als einen Cosinus und suche den zugehörigen Winkel z. Dann sind $(\pi - z)$ und $(\pi + z)$ im 2ten und 3ten Quadranten die Winkel, deren Cosinus $= -\beta$, d. h. der gegebene ist; alles nach (55.).

Ist aber von einem Winkel Sinus und Cosinus zugleich gegeben, so gehört nur ein einziger Winkel dazu und zwar liegt dieser Winkel im

1ten, 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten,

je nachdem sein Sinus

$+$, $+$, $-$, $-$

und zu gleicher Zeit sein Cosinus

$+$, $-$, $-$, $+$ ist.

In diesem letztern Falle muß aber allemal der gegebene Sinus quadrirt und zu dem Quadrat des gegebenen Cosinus addirt, 1 geben; so daß, wenn diese Bedingungsgleichung nicht erfüllt seyn sollte, die Aufgabe, den zugehörigen Winkel anzugeben, unmöglich seyn würde.

Soll ferner ψ wirklich einem Winkel entsprechen, (ein Winkel, oder sein zugehöriger Bogen seyn), so muß sein gegebener Sinus, und auch sein gegebener Cosinus, absolut genommen, jedesmal < 1, oder höchstens $= 1$ sein, übrigens eine positive oder eine negative Zahl, wenn nicht Null.

57.

Die Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten sind am allgemeinsten und für jedes x, durch die Gleichungen

XX. $tg\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x}$, XXI. $cotg\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}$,

XXII. $sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$, XXIII. $cosec\ x = \frac{1}{sin\ x}$

definirt; und aus diesen Definitionen gehen in Verbindung mit (53.) sogleich noch hervor die Formeln:

$$tg\ 0 = 0, \qquad cotg\ 0 = \infty$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}\pi = \infty, \qquad cotg\ \tfrac{1}{2}\pi = 0$$

$$tg\ \pi = 0, \qquad cotg\ \pi = \infty$$

$$tg\ \tfrac{3}{2}\pi = \infty, \qquad cotg\ \tfrac{3}{2}\pi = 0$$

und

$$\text{XXIV.}\quad cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}, \qquad \text{XXV.}\quad tg\ x = \frac{1}{cotg\ x}$$

$$\text{XXVI.}\quad sec^2\ x = 1 + tg^2\ x,$$

$$\text{XXVII.}\quad cosec^2\ x = 1 + cotg^2\ x;$$

desgleichen

$$\text{XXVIII.}\quad tg.(x+y) = \frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x.tg\ y}$$

$$\text{XXIX.}\quad tg.(x-y) = \frac{tg\ x - tg\ y}{1 + tg\ x.tg\ y}$$

$$\text{XXX.}\quad tg.2x = \frac{2\ tg\ x}{1 - tg^2\ x}$$ und dergl. mehr.

Außerdem folgt noch aus diesen Definitionen, daß in jedem beliebigen rechtwinklichen Dreiecke (Fig. 37.)

$$\frac{BC}{AC} = tg\ BAC \quad \text{und} \quad \frac{AC}{BC} = cotg\ BAC \quad \text{ist,}$$

so wie auch sogleich für den Radius $= 1$,

$$tg\ BAC = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{1} = DE,$$

$$cotg\ BAC = cotg\ AGF = \frac{FG}{AF} = \frac{FG}{1} = FG,$$

d. h. $tg\,BAC = DE$ und $cotg\,BAC = FG$

hervorgeht, wo aber unter DE und FG nicht diese Linien selber, sondern die absoluten Zahlen gedacht werden müssen, welche sich als Maaße dieser Linien ergeben, wenn man solche durch den Radius als Einheit (als Gemäß) mißt.

58.

Und ist z ein spitzer Winkel (oder sein zugehöriger Bogen), so ist *tg* z positiv, und aus (57. XIX. und 55,)

$$tg\,(\pi - z) = -tg\,z,$$

$$tg\,(\pi + z) = +tg\,z,$$

$$tg\,(2\pi - z) = -tg\,z;$$

also die Tangenten im 1ten und 3ten Quadranten positive, im 2ten und 4ten aber negative Zahlen (ihrer Definition gemäß).

Ist daher eine Tangente positiv gegeben, so gehören dazu zwei Winkel, ein spitzer z und dann $(\pi + z)$ im 3ten Quadranten.

Ist aber eine Tangente negativ gegeben, etwa $= -y$, so suche man den spitzen Winkel z, dessen Tangente die absolute Zahl y ist, und dann sind $(\pi - z)$ und $(2\pi - z)$ die Winkel im 2ten und 4teu Quadranten, deren Tangente die negative Zahl $-y$, d. h. die gegebene ist.

59.

1. 1.) Sind daher u und v zwei Winkel, von denen man weiß, daß $sin\,u = sin\,v$ ist, so ist entweder $u = v$, oder $u + v = \pi$; oder $u + v = 3\pi$. — Die beiden erstern Fälle können statt finden, wenn diese Sinus positiv sind; der letztere Fall, wenn sie negativ seyn sollten.

Und im Falle man wüßte, daß u und v blos hohle Winkel (spitze, stumpfe oder rechte) sein können, etwa Winkel eines Dreiecks, so kann nur $u = v$ oder $u + v = \pi$ seyn.

2. 2.) Weiß man dagegen, daß $cos\, u = cos\, v$ ist, so ist entweder $u = v$ oder $u + v = 2\pi$.

3. 3.) Ist aber $tg\, u = tg\, v$ gegeben, so ist entweder $u = v$ oder $(u - v) = \pm\pi$, wo das (+) Zeichen gilt, wenn $u > v$, das (−) Zeichen dagegen, wenn $u < v$ ist.

60.

Ferner ergibt sich noch leicht, wenn π den Bogen von 180° oder 180° selbst, $\frac{1}{2}\pi$ also 90° vorstellt:

$$\begin{aligned} sin\ (\tfrac{1}{2}\pi \pm \psi) &= \ \ cos\ \psi \\ cos\ (\tfrac{1}{2}\pi \pm \psi) &= \mp sin\ \psi \\ tg\ \ (\tfrac{1}{2}\pi - \psi) &= \ \ cotg\ \psi \\ cotg\ (\tfrac{1}{2}\pi - \psi) &= \ \ tg\ \ \psi \end{aligned}$$

61.

Außer dem, was wir hier aus der analytischen Trigonometrie angeführt haben, bemerken wir uns noch aus der ebenen Trigonometrie nachstehende zwei Sätze:

I. In jedem (spitz-, recht- oder stumpf-winklichten) Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

II. In jedem Dreieck (spitz-, recht- oder stumpfwinklich), wenn die 3 Seiten durch a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel dagegen beziehlich durch α, β und γ bezeichnet werden, ist allemal

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\, \alpha$$

und

$$cos\, \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

d. h. das Quadrat der einen beliebigen Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Produkt aus diesen letztern Seiten in den Cosinus des dazwischen liegenden Winkels multiplicirt.

Und weil für den Fall, daß der Winkel α ein rechter, $=\frac{1}{2}\pi$ wird, $\cos\alpha=0$ ist, also der gemeine Pythagorische Lehrsatz daraus hervorgeht, so mag dieser letztere Satz (II.) künftig der allgemeine Pythagorische Lehrsatz heißen.

Die

analytische und höhere Geometrie

in

ihren Elementen.

Erstes Kapitel.

Von dem System paralleler Coordinaten. Unterscheidung der Coordinaten, der Coordinaten-Maaße und der Coordinaten-Werthe. Von der Art und Weise, Punkte und ihre Entfernungen durch Coordinatenwerthe darzustellen.

§. 1. Erklärung.

Sind (Fig. 1.) XAX′ und YAY′ zwei in A sich schneidende gerade Linien, welche nach allen Seiten in's Unendliche fortgehend gedacht werden und mit einander den Winkel XAY = φ bilden, so theilen sie die Ebene, in welcher sie liegen, in 4 unendliche Räume, Regionen genannt, und um diese besser von einander unterscheiden zu können, mag ein für allemal XAY die erste, XAY′ die zweite, X′AY die dritte und X′AY′ die vierte heißen, während φ allemal den Winkel bedeutet, welchen die Linien X′AX und Y′AY in der ersten (folglich auch in der 4ten) Region mit einander bilden, so daß dann der Winkel in der 2ten und 3ten Region $= 180^{\circ} - \varphi$ seyn wird.

Die beiden unendlichen geraden Linien X′AX, Y′AY heißen die Coordinaten-Axen, und zwar mag X′AX die Abscissen-Axe, Y′AY dagegen die Ordinaten-Axe genannt werden; beide zuweilen auch Axen schlechthin. — Und der Punkt A, in welchem sich diese Axen schneiden, heißt dann der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Ursprung der Coordinaten.

§. 2. Erklärung.

Eine mit der Abscissen-Axe (Fig. 2.) X′AX parallele Richtung (gerade unendliche Linie) $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$ ist nun gegeben, sobald die Linien AB oder AC gegeben sind, durch welche sich die Lage der Punkte B und C, in denen diese, mit der Abscissen-Axe parallelen Linien $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$ die Ordinaten-Axe Y′AY treffen, festgesetzt sieht. Diese Linie AB und dann auch jede andere mit ihr parallele, zwischen der Abscissen-Axe X′AX und der Linie $\alpha\beta$ liegende, also auch ihr gleiche Linie, z. B. DE, FG, LK, etc. etc. nennen wir die Ordinate der (mit der Abscissen-Axe X′AX parallelen) Linie $\alpha\beta$, und eben so heißt AC oder DH, FJ, LM etc. etc. die Ordinate von $\gamma\delta$.

Denkt man sich irgend eine begrenzte Linie Z als Einheit (Gemäß, Maaßstab) und damit die Ordinaten AB, AC gemessen, so ergeben sich Zahlen b und d als Maaße, ganze oder gebrochene, und diese Zahlen mögen die Ordinaten-Maaße heißen.

Weil jedoch weder durch das Ordinaten-Maaß noch durch die Ordinate selbst, die Lage der mit der Abscissen-Axe parallelen Linie $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$ völlig bestimmt gegeben ist, in so ferne man noch nicht weiß, ob solche oberhalb oder unterhalb der Abscissen-Axe X′AX liegen werde, so kann man dem Ordinaten-Maaße noch das (+) oder das (—) Zeichen vorsetzen, je nachdem man will, daß die Ordinate oberhalb oder unterhalb der Abscissen-Axe genommen werden solle. Die dadurch entstehenden positiven oder negativen Zahlen +b, —d heißen dann die Ordinaten-Werthe, und man sagt: „der Ordinaten-Werth sey =0", so oft $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$ mit der Abscissen-Axe X′AX selbst zusammenfällt.

Note. Nimmt man also den Zoll zur Einheit an, und sagt man „der Ordinaten-Werth" einer mit der Abscissen-Axe parallelen Linie sey =+5 oder =—3, so versteht man darunter, nach der eben getroffenen Uebereinkunft, daß die Linie im erstern Falle oberhalb der Abscissen-Axe und zwar in der Richtung der Ordinaten-Axe

um 5 Zoll von der Abscissen-Axe entfernt liege, im andern Falle dagegen um 3 Zoll entfernt, aber unterhalb der Abscissen-Axe anzutreffen sey.

Anmerknng. Die erste und dritte Region liegen also auf der Seite der positiven, die zweite und 4te dagegen auf der Seite der negativen Ordinatenwerthe.

§. 3. Erklärung.

Was in Bezug auf die Abscissen-Axe gesagt worden, soll nun auch auf die Ordinaten-Axe ausgedehnt seyn. Die Linie (Fig. 2.) AF (oder CJ oder BG etc.) heißt die Abscisse der mit der Ordinaten-Axe parallelen Linie $\varepsilon\zeta$; und eben so AL (oder CM oder BK, etc.) die Abscisse der mit der Ordinaten-Axe parallelen Linie $\mu\nu$. Und werden diese Linien AF oder AL etc. durch die gemeinschaftliche, ein für allemal festgesetzte, immer dieselbe bleibende Einheit Z gemessen, so ergeben sich für sie ganze oder gebrochene, aber absolute (d. h. nicht positive und nicht negative) Zahlen, und diese, welche hier für den Augenblick durch a und c vorgestellt seyn mögen, heißen dann die Abscissen-Maaße der mit der Ordinaten-Axe parallelen Linien $\varepsilon\zeta$ und $\mu\nu$. Und um auszudrücken, daß diese mit der Ordinaten-Axe parallelen Linien rechts oder links der Ordinaten-Axe liegen, setzt man diesen Abscissen-Maaßen a, c noch daß (+) oder das (—) Zeichen vor; und die dadurch entstehenden positiven oder negativen Zahlen $+a$, $-c$, werden dann die Abscissen-Werthe genannt, und man sagt zugleich der Abscissen-Werth einer Linie sey $=0$, so oft die Linie mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt.

Anmerkung 1. Die Ordinaten-Axe Y'AY hat also eine positive Seite und eine negative. Die positive Seite derselben kann man nehmlich diejenige nennen, nach welcher hin die positiven Abscissen-Werthe weisen; die negative Seite dagegen die der erstern entgegengesetzte. — Und eben so hat die Abscissen-Axe eine positive Seite, nach welcher hin nehmlich die

positiven Ordinaten-Werthe weisen, und eine negative Seite, durch die Richtung der negativen Ordinaten-Werthe bestimmt.

Von diesen positiven und negativen Seiten der Axen wollen wir jedoch noch unterscheiden die positiven und negativen Richtungen derselben. Die Richtungen AX, AY, von A aus in's Unendliche gedacht, können nehmlich die positiven Richtungen der Axen genannt werden, während dann AX′, AY′, von A aus in's Unendliche gedacht die negativen Richtungen derselben Axen seyn sollen.

Die erste Region der Axen ist dann diejenige, welche auf den positiven Seiten der Axen liegt, oder auch, welche von den positiven Richtungen der Axen begrenzt wird. Die zweite Region der Axen liegt auf der negativen Seite der Abscissen-Axe und auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe, wird aber von der negativen Richtung der letztern und von der positiven Richtung der erstern begrenzt.

Anmerkung 2. Dadurch daß von zwei sich schneidenden Coordinaten-Axen die eine der 4 Regionen als die erste herausgehoben wird, ist die positive Seite der Abscissen-Axe und auch die positive Seite der Ordinaten-Axe völlig bestimmt, und eben dadurch die 2te, die 3te und auch die 4te Region völlig bestimmt.

Wir werden daher in der Folge, um die positiven (und dadurch auch die negativen) Seiten beider Coordinaten-Axen auf einmal herauszuheben, bloß diejenige der 4 Regionen angeben, welche als die erste angenommen werden soll oder muß.

Note. Daß dies alles nur willkührlich angenommen werde, um die Lage der mit den Coordinaten-Axen parallelen Linien bequem durch eine einzige Angabe (ihres Ordinaten- oder Abscissen-Werthes) ausdrücken zu können, fällt sogleich in die Augen. Daß aber der Gegensatz der Richtung der Ordinaten AB, AC oder der Abscissen AF, AL, gerade durch Zuziehung der Additions- und Subtraktionszeichen vorgestellt wird, gewährt deshalb für die Folge die bedeutendsten Vortheile, weil, wie wir bald sehen werden, der Gegensatz der Richtungen sich am nächsten dem Gegensatz anschließt, der zwischen diesen Operationen der Addition und der Subtraktion statt findet.

§. 4. Erklärung.

Jeder Punkt in der Ebene z. B. M, K, J oder G (Fig. 2.) kann als gegeben angesehen werden mittelst zweier durch ihn gehender, mit den beiden Coordinaten-Axen paralleler Linien. Er ist also völlig bestimmt durch den Abscissen-Werth und den Ordinaten-Werth dieser beiden mit den Axen parallelen Linien. — Man versteht daher unter Abscissen-Werth irgend eines Punktes z. B. M oder K, den Abscissen-Werth der mit der Ordinaten-Axe parallele Linie $\mu\nu$, in welcher er liegt, während man unter dem Ordinaten-Werth desselben Punktes, den Ordinaten-Werth der parallelen Linie $\alpha\beta$ oder $\gamma\delta$ versteht, in welcher er liegt. — Und ein Punkt ist, durch seine Coordinaten-Werthe völlig gegeben.

Anmerkung 1. Verstehen wir also, wie das in der Folge oft geschieht, unter AF, AL, AB, AC, und überhaupt unter einer durch ihre Endpunkte näher bezeichneten Linie nicht mehr die Linie selber sondern ihr Maaß [d. h. die absolute ganze oder gebrochene Zahl, welche sich ergibt, wenn die Linie selbst durch die Einheit (Gemäß, Maaßstab) Z gemessen wird]; so sind $+$AF und $+$AB die Coordinaten-Werthe (und zwar $+$AF der Abscissen-Werth und $+$AB der Ordinaten-Werth) des Punktes G, während $+$AD und $-$AC (oder $-$DH) die Coordinaten-Werthe des Punktes H, desgleichen $-$AL und $+$AB (oder $+$LK) die Coordinaten-Werthe des Punktes K, endlich $-$AL und $-$AC (oder $-$LM) die Coordinaten-Werthe des Punktes M genannt werden müssen.

Anmerkung 2. Aus den (Anmerkungen zu §§. 2. und 3.) geht hervor: Liegt ein Punkt in der

	Iten,	IIten,	IIIten	oder IVten Region,
so ist beziehlich				
der Abscissen-Werth:	$+$,	$+$,	$-$,	$-$
der Ordinaten-Werth:	$+$,	$-$,	$+$,	$-$.

§. 5. Zusatz.

Man unterscheidet ferner auch für einen Punkt z. B. H 1) seine Coordinaten (Abscisse AD, Ordinate AC oder DH), worunter diese Linien AD oder AC selbst verstanden werden, (absolute Linien, weil keine Linie positiv oder negativ seyn kann), 2) seine Coordinaten-Maaße, d. h. die absoluten ganzen oder gebrochenen Zahlen p und q, welche sich für die Linien AD, AC ergeben, wenn letztere durch die Einheit (das Gemäß) Z gemessen werden; endlich 3) seine Coordinaten-Werthe d. h. die positiven und negativen Zahlen $+p$ und $-q$, welche entstehen, wenn den Coordinaten-Maaßen p und q, noch das (+) oder (—) Zeichen vorgesetzt wird, um dadurch festzusetzen, daß der Punkt H rechts der Ordinaten-Axe und unterhalb der Abscissen-Axe liege. Dasselbe gilt für jeden andern Punkt in der Ebene der Axen.

§. 6. Zusatz.

Aus diesen Definitionen folgt sogleich, unter der Voraussetzung, daß der Maaßstab (die Einheit) Z ein für allemal derselbe bleibe; *)

1) Alle Punkte, welche einerlei Abscissen-Werth haben, liegen in einer und derselben mit der Ordinaten-Axe parallelen Linie, welche denselben Abscissen-Werth hat; und ist der Abscissen-Werth $=0$, so liegen sie in der Ordinaten-Axe selber.

2) Alle Punkte, welche einerlei Ordinaten-Werth haben, liegen in einer und derselben mit der Abscissen-Axe parallelen Linie, welche denselben Ordinaten-Werth hat; und ist der Ordinaten-Werth $=0$, so liegen sie alle in der Abscissen-Axe selbst.

3) Ist der Abscissen- und der Ordinaten-Werth eines Punktes, jeder $=0$, so liegt der Punkt in der Ordinaten-Axe und in der Abscissen-Axe zugleich, also in dem Durchschnittspunkt A der

---

*) Solches wird immer hier vorausgesetzt, so lange nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt wird.

Axen. Jeder der beiden Coordinaten-Werthe des Anfangspunktes A der Coordinaten, ist daher $=0$.

4) Haben zwei Punkte einerlei Abscissen-Werth und auch einerlei Ordinaten-Werth (in Bezug auf dieselben Axen, und auf dieselbe ein für allemal angenommene Einheit Z), so fallen sie in einen und denselben zusammen.

5) Haben die einzelnen Punkte zweier (geraden oder) krummen Linien nach der Ordnung einerlei Coordinaten-Werthe, so sind die beiden Linien congruent, sobald nur die Axen in beiden, in ihrer ersten Region denselben Winkel φ mit einander bilden, so daß diese Axen selber dergestalt sich decken, daß ihre gleichnamigen Regionen aufeinander zu liegen kommen.

§. $6\frac{1}{2}$.

Bemerkung. Denkt man sich eine neue Ordinaten-Axe $Y_1A_1Y'_1$ (Fig. 3.) parallel mit der alten, so ist für irgend eine Linie MP, welche mit den Ordinaten-Axen parallel läuft

$$AP = AA_1 + A_1P.$$

Aber AP ist die alte Abscisse und A_1P die neue Abscisse der Linie PM, während AA_1 die alte Abscisse der neuen Ordinaten-Axe seyn muß. Wird daher die alte Abscisse AP der Linie PM durch x, die neue A_1P durch x_1 und die alte Abscisse AA_1 der neuen Ordinaten-Axe durch p bezeichnet, so hat man die Gleichung $x = p + x_1$. Es fragt sich nun, ob diese Gleichung noch gilt, wenn x und x_1 nicht die Abscissen selber, sondern die Abscissen-Werthe bedeuten, einer nicht blos rechts, sondern beliebig liegenden (mit den Ordinaten-Axen parallelen) Linie PM, und wenn p ebenfalls nicht die Abscisse, sondern den Abscissen-Werth vorstellt, der neuen Ordinaten-Axe auf die alte bezogen, mag erstere rechts oder links der letzteren gedacht werden.

Daher folgender

§. 7. Hauptlehrsatz.

Sind (Fig. 3.) X'AX und Y'AY zwei Coordinaten-Axen und $Y'_1A_1Y_1$ eine neue Ordinaten-Axe, parallel mit

der alten, rechts oder links der alten Axe liegend; ist ferner x der alte und x_1 der neue Abscissen-Werth irgend einer und derselben mit den Ordinaten-Axen parallelen, übrigens beliebig liegenden Linie PM (oder P′M′, oder P″M″); ist endlich p der alte Abscissen-Werth der neuen Ordinaten-Axe, so ist allemal

$$x = p + x_1,$$

wenn nur auch in Bezug auf die neue Ordinaten-Axe, eben so wie auf die alte, die Seite zur rechten derselben als die Seite der positiven, und die Seite zur linken derselben, als die Seite der negativen Abscissen-Werthe angenommen wird *).

Beweis I. Sey die neue Ordinaten-Axe rechts der alten, also p eine positive Zahl und $= AA_1$, so sind für diesen Hauptfall 3 Unterfälle möglich, nehmlich die Linie liegt 1) zur rechten wie PM, oder 2) in mitten wie P′M′ oder 3) zur linken der beiden Ordinaten-Axen, wie P″M″.

Im Falle (1.) ist $x = AP$, $x_1 = A_1P$ und dabei

$$AP = AA_1 + A_1P, \quad \text{also} \quad x = p + x_1.$$

Im Falle (2.) ist $x = AP'$ und $x_1 = -A_1P'$ (weil P′ links der neuen Ordinaten-Axe liegt und x_1 den Abscissen-Werth vorstellen soll, also dasmal die negative Zahl, welche entsteht, wenn man dem Abscissen-Maaß A_1P' noch das (—) Zeichen vorsetzt); also auch $A_1P' = -x_1$ **). Dabei ist aber jetzt $AP' = AA_1 - A_1P'$, also $x = p - (-x_1) = p + x_1$.

---

*) Es sind hier der größern Veranschaulichung wegen, häufig die Worte: rechts, links, oben, unten, und dgl. gebraucht, welche sich auf eine bestimmte Lage der Axen, die hier nicht eigentlich in Betrachtung kommt, beziehen. Recht verstanden sind jedoch diese Benennungen nicht anstößig.

**) Aus dieser Gleichung folgt gar nicht, daß A_1P' negativ, d. h. eine negative Linie oder eine negative Zahl sey. Im Gegentheil stellt x_1 nach unsrer Annahme dasmal eine negative Zahl vor und $-x_1$ ist deshalb wiederum einer positiven oder absoluten Zahl gleich, nehmlich der absoluten Zahl A_1P'.

Im Falle (3.) endlich ist $x = -AP''$, also $AP'' = -x$; und $x_1 = -A_1P''$, also $A_1P'' = -x_1$; und dabei

$$AP'' = A_1P'' - AA_1,$$

also $$-x = -x_1 - p$$

d. h. $$x = p + x_1.$$

Also ist in allen 3 Unterfällen des Falles (I.) in der That $x = p + x_1$.

II. Ist aber die neue Axe links der alten, also p eine negative Zahl, so kann man sich, um dieselbe Figur gebrauchen zu können, $Y'_1A_1Y_1$ als die alte und $Y'AY$ als die neue Axe denken. Dann ist $p = -AA_1$ und was vorher x_1 war, das ist jetzo x, und was vorher durch x vorgestellt wurde, wird jetzt durch x_1 vorgestellt, und die Linie AA_1 welche vorher $= p$ war, ist jetzo $= -p$ (weil jetzo p eine negative Zahl, also $-p$ die absolute Zahl vorstellt).

War also vorher $x = p + x_1$, so muß dieselbe Gleichung für den jetzigen Fall noch statt finden, wenn man jetzt x_1 statt x, x statt x_1 und $-p$ statt p setzt. Dann geht aber dieselbe Gleichung $x = p + x_1$ über in $x_1 = -p + x$, woraus jedoch wiederum $x = p + x_1$ folgert, wie im Falle (I.).

Anmerkung 1. Wenn dem Anfänger es schwer fallen sollte, diesen letztern Schluß sogleich zu verfolgen, so kann man ja auch die neue Figur machen und dann den Beweis genau wie in (I.) führen. Es ist jetzt nehmlich (Fig. 4.) $p = -AA_1$, oder $AA_1 = -p$, $AP = x$, $A_1P = x_1$, und $AP = A_1P - AA_1$; also $x = x_1 - (-p) = x_1 + p = p + x_1$. — Ferner $x = -AP'$, $x_1 = A_1P'$, und dabei $AP' = AA_1 - A_1P'$ d. h. $-x = -p - x_1$ oder $x = p + x_1$. — Endlich ist $x = -AP''$, $x_1 = -A_1P''$ und $AP'' = AA_1 + A_1P''$ d. h. $-x = -p + (-x_1)$ oder $x = p + x_1$.

Anmerkung 2. Diese Gleichung $x = p + x_1$ gilt sogar auch dann noch, wenn man sich wiederum die neue Axe

mit der alten zusammenfallend denken wollte, weil dann $p=0$ wäre, und die Gleichung $x=p+x_1$ für diesen Fall in $x=x_1$ übergehen würde, welches dann offenbar eine richtige Gleichung wäre.

Anmerkung 3. Endlich ist, genau genommen, unser Hauptlehrsatz nicht eher ganz vollständig erwiesen, als bis man noch gezeigt hat, daß er statt findet, auch wenn PM mit der einen oder der andern Ordinaten-Axe zusammenfallen sollte. Fällt aber PM mit der neuen Ordinaten-Axe zusammen, so ist $x_1=0$ und $x=p$, also abermals $x=p+x_1$. — Und fällt PM mit der alten Ordinaten-Axe zusammen, so ist $x=0$ und $x_1=-p$ *) (mag p selbst eine positive oder negative Zahl seyn); also ist nun noch $x=p+x_1$.

Note 1. Man kann sich dieses letztere auch so vorstellen. Da allemal $x=p+x_1$ ist, wenn PM von den Ordinaten-Axen noch verschieden ist, so gilt dieselbe Gleichung auch noch, wenn diese Linie PM (oder P′M′ oder P″M″) der einen oder der andern Axe immer näher und näher rückt und unendlich nahe kommt. Daher muß, vermöge eines in uns liegenden Uebergangsgesetzes, welches sich überall bestätigt, und welches wir nicht selten anzuwenden gezwungen sind, dieselbe Gleichung auch noch statt finden, wenn endlich die Linie mit der Axe selbst zusammenfällt.

Doch würden wir als Mathematiker, den vorhergehenden Weg, als den anschaulichern und dem Wesen der Mathematik mehr entsprechenden, vorziehen, während letzterer mehr dem Philosophen zusagen würde.

Note 2. Ueberhaupt könnte man den ganzen Hauptlehrsatz auf eine ähnliche Art erfinden, und namentlich rechtfertigen, warum man in der frühern Definition der Coordinaten-Werthe den Gegensatz der Richtungen mit dem Gegensatze des Addirens und Subtrahirens in Verbindung zu bringen, versuchen konnte.

Es ist nehmlich für die Linie PM (Fig. 3.) allemal $x=p+x_1$, weil dann x, p und x_1 alle drei positive Zahlen und den Maaßen

*) Man kann sich den Satz besonders bemerken, daß wenn p der alte Abscissen-Werth ist der neuen Ordinaten-Axe, so ist $-p$ der neue Abscissen-Werth der alten Ordinaten-Axe.

AP, AA_1 und A_1P beziehlich gleich sind, während, der Ansicht zu Folge, $AP = AA_1 + A_1P$ ist. Denkt man sich nun diese Linie PM von der rechten zur linken parallel mit sich fortbewegt, so bleibt alles wie Anfangs, auch wenn endlich PM der $Y_1A_1Y_1'$ unendlich nahe rückt, daher, vermöge des in uns liegenden Uebergangsgesetzes, auch noch, wenn PM mit dieser neuen Axe ganz zusammen fällt. Wird nun PM noch immer weiter fortbewegt gedacht, so daß P'M' daraus wird, so geht die Gleichung

$$AP = AA_1 + A_1P$$

jetzt über in $AP' = AA_1 - A_1P'$

oder in $AP' = AA_1 + (-A_1P')$. Aber eben

weil jetzt die Gleichung $AP = AA_1 + A_1P$

in $AP' = AA_1 - A_1P'$

d. h. in $AP' = AA_1 + (-A_1P')$

übergeht, so muß man jetzt unter x_1 die negative Zahl $-A_1P'$ sich denken, wenn die alte Form $x = p + x_1$ auch jetzt noch statt finden soll.

Denkt man sich nun PM noch weiter fortgerückt, endlich mit der alten Axe zusammenfallend, und hernach in P''M'' übergegangen, so ist jetzt auch nicht mehr $AP' = AA_1 - A_1P''$ sondern

$AP'' = A_1P'' - AA_1$ oder $-AP'' = AA_1 + (-A_1P'')$.

Soll also die alte Form $x = p + x_1$ auch jetzt noch statt finden, so muß man sich jetzt auch unter x eine negative Zahl denken. — Und hat man umgekehrt vorher schon ein für allemal für diese Lage des Punktes (M'') x und x_1 negativ gedacht, so folgt, daß auch jetzt noch $x = p + x_1$ seyn müsse.

§. 8. Hauptlehrsatz.

Denkt man sich eine neue Abscissen-Axe parallel mit der alten, und ihren alten Ordinaten-Werth $= q$. Ist ferner für irgend eine mit den Abscissen-Axen parallele Linie, der alte Ordinaten-Werth $= y$, der neue $= y_1$, so ist allemal $y = q + y_1$, wenn nur für beide Abscissen-Axen zugleich die obere Seite als die der positiven, die untere dagegen als die der negativen Ordinaten angenommen worden ist.

Beweis. Was in Bezug auf eine der Coordinaten-Axen gilt, das muß auch in Bezug auf die andere gelten, weil kein Merkmal vorhanden ist, wodurch sich die eine von der andern unterscheidet.

Note. Wenn man also will, so kann man den Beweis des Hauptsatzes (§. 7.) hier nur wiederholen, die Axen mit einander verwechselnd.

§. 9. Hauptlehrsatz.

Denkt man sich zwei neue Axen, parallel mit den alten, und sind die alten Coordinaten-Werthe des neuen Anfangspunktes p und q, (nämlich p der Abscissen-Werth, q der Ordinaten-Werth); sind dann für irgend einen beliebigen Punkt M (rechts, links, oben oder unten) die alten Coordinaten-Werthe x und y, die neuen dagegen x_1 und y_1, so ist allemal:

1) $x = p + x_1$ und 2) $y = q + y_1$

also auch:

3) $x_1 = x - p$ und 4) $y_1 = y - q$.

Beweis. Denn da p der alte Abscissen-Werth des neuen Anfangspunktes ist, so ist er auch der alte Abscissen-Werth der neuen Ordinaten-Axe; und da x und x_1 die alten und neuen Abscissen-Werthe eines und desselben Punktes M sind, so bleiben sie auch dieselben für die durch M mit den Ordinaten-Axen parallel gedachte Linie; also ist nach (§. 7.):

$$x = p + x_1 \quad \text{oder} \quad x_1 = x - p.$$

Eben so folgt aus (§. 8.):

$$y = q + y_1 \quad \text{oder} \quad y_1 = y - q.$$

Note. Da diese Gleichungen allgemein erwiesen sind, also für jeden Fall, d. h. für jede parallele Lage der neuen Axen (links oder rechts, oberhalb oder unterhalb der alten), eben so für jede Lage des Punktes M genau dieselben bleiben; so gibt dies ein praktisches Mittel, diese Gleichungen schnell sich in das Gedächtniß zurückzurufen, wenn man sie daraus verloren haben sollte. Man construirt sich nämlich einen einzigen und zwar den einfachsten Fall z. B. (Fig. 5.), wo XAX′ und YAY′ die alten, $X_IA_IX_I'$ und $Y_IA_IY_I'$ die neuen Axen sind und M der fragliche Punkt ist, und entnimmt nun aus der bloßen Betrachtung der Figur sogleich

$$AP = AA' + A'P = AA' + A_IP',$$
$$AQ \text{ oder } MP = AA'' + A''Q = A'A_I + MP';$$

d. h. $x = p + x_1$ und $y = q + y_1$; weil für diesen Fall $x = AP$, $x_1 = A_IP'$, $AA' = p$ und $y = PM$, $y_1 = P'M$ und $A'A_I = q$ ist.

Man weiß aber, vermöge des eben erwiesenen Hauptlehrsatzes, daß dieselben Gleichungen nun noch statt finden, auch für jeden der vielen übrigen Fälle, in denen die neue Abscissen-Axe unter der alten, die neue Ordinaten-Axe links der alten, und der Punkt M jede mögliche Lage in jeder beliebigen Region der alten oder der neuen Coordinaten-Axen haben kann.

§. 10. Zusatz.

Aus diesem Hauptlehrsatz (§. 9.) geht sogleich hervor, daß, ein Punkt M mag in Bezug auf die Regionen vorhandener alter Axen X′AX und Y′AY gegeben oder gedacht seyn, wie er will, d. h. seine alten Coordinaten-Werthe x und y mögen beliebig positive oder negative Zahlen oder Null seyn, man doch allemal solche neue Axen $X_1'A_1X_1$ und $Y_1'A_1Y_1$ wird annehmen können, wie sie in dem (§. 9.) gedacht sind, und zugleich so, daß dieser gegebene Punkt M in ihrer ersten Region liegt, d. h. seine neuen Coordinaten-Werthe x_1 und y_1 beide positiv sind.

Denn da allemal

$$x_1 = x - p = x + (-p) \quad \text{und} \quad y_1 = y - q = y + (-q)$$

ist, so darf man im schlimmsten Falle, p und q nur negativ nehmen (d. h. den neuen Anfangspunkt in die 4te Region der alten Axen verlegen) dabei aber, absolut betrachtet, groß genug, daß die positiven Zahlen $-p$ und $-q$ größer werden, als die absoluten Glieder von x oder y, wenn x oder y negative Zahlen seyn sollten.

Note. Will man das, was eben calculativ (annalytisch) streng und für jeden Fall erwiesen ist, bloß anschaulich machen, so denke man sich M in der vierten Region der alten Axen (Fig. 6.), wo also x und y beide, negative Zahlen sind, so kann man die neue Ordinaten-Axe so lange links hinausschieben (parallel mit sich), bis M rechts derselben liegt und x_1 muß dann positiv werden. Eben so kann man sich die neue Abscissen-Axe parallel mit sich so lange nach unten gerückt denken, bis der Punkt M über ihr liegt, und dann ist auch y_1 positiv und der Punkt M liegt in der ersten Region dieser neuen Axen. Aber dann fällt auch in die Augen, daß $p = -AB$ und $q = -AC$ ist, weil der Punkt A_1 in die 4te Region der alten Axen zu liegen gekommen ist.

§. $10\frac{1}{2}$.

Bemerkung. Hat man zwei Linien (Fig. 7.) PM und P′M′ parallel mit der Ordinaten-Axe und beide rechts derselben liegend, so daß ihre Abscissen-Werthe x und x′ beide positiv sind, so ist, weil $AP = x$ und $AP' = x'$ ist, allemal $x - x' = PP'$ d. h. gleich der Entfernung der beiden Linien PM und P′M′, in der Richtung der Abscisse genommen; und halbirt man PP′ in Q, so ist

$$P'Q = \frac{x - x'}{2}, \text{ also } AQ = AP' + P'Q = x' + \frac{x - x'}{2} = \frac{x + x'}{2}.$$

Es entsteht daher die Frage, ob diese Gleichungen noch statt finden, wenn die Linien PM, P′M′ beliebig liegen, doch parallel mit der Ordinaten-Axe, und x und x′ noch immer ihre Abscissen-Werthe vorstellen. Daher folgender

§. 11. Lehrsatz.

Sind x′ und x″ die Abscissen-Werthe zweier beliebigen Punkte P und P′ in der Abscissen-Axe (oder zweier beliebigen durch P und P′ hindurchgehenden, mit der Ordinaten-Axe parallelen Linien), so ist allemal $PP' = \pm(x' - x'')$, wo das (+) Zeichen gilt, wenn $x' > x''$, das (—) dagegen wenn $x' < x''$ ist (weil PP′, wie jede Linie, allemal absolut ist, also auch ein absolutes (positives) Maaß haben muß). — Und wird PP′ in Q halbirt, so ist, wenn x den Abscissen-Werth des Halbirungspunktes Q bedeutet,

$$x = \frac{x' + x''}{2} \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}(x' + x''),$$

mögen sonst x′ und x″ beliebig positive, oder negative Zahlen oder Null seyn.

Beweis. Für den Fall, daß x′ und x″ beide positiv sind, daß also P und P′ beide rechts der Ordinaten-Axe liegen, ist die Richtigkeit des Satzes kurz vorher (§. $10\frac{1}{2}$.) bemerkt worden. Für jeden andern Fall, in welchem x′ oder x″ oder beide zugleich Null oder negative Zahlen seyn können, denke man sich

eine neue Ordinaten-Axe, deren alter Abscissen-Werth p, und negativ ist; und sind nun x_1' und x_1'' die neuen Abscissen-Werthe beziehlich derselben Punkte, von welchen x' und x'' die alten waren, so hat man nach (§. 7.), wenn x_1 auch noch der neue Abscissen-Werth von Q ist,

1) $x_1' = x' - p$, 2) $x_1'' = x'' - p$ und 3) $x_1 = x - p$.

Da man nun p negativ und so groß nehmen kann (d. h. da man die neue Ordinaten-Axe so weit links gerückt denken kann), daß $x' - p$ und $x'' - p$, also x_1' und x_1'' positiv werden, so ist nun, weil für diesen Fall unser Lehrsatz schon als richtig erkannt ist 4) $\pm(x_1' - x_1'') = PP'$

und 5) $$x_1 = \frac{x_1' + x_1''}{2}.$$

Substituirt man aber hier statt x_1' und x_1'', so wie statt x_1 ihre Werthe aus den Gleichungen (1—3.), so ergibt sich auf's neue

$$\pm(x' - x'') = PP'$$

und

$$x = \frac{x' + x''}{2}.$$

Note. Wenn man wollte, so könnte man auch in (Fig. 8.) die einzelnen Fälle durchnehmen. — Im Falle, daß PM und P′M′ beide rechts der Ordinaten-Axe liegen, war der Satz richtig. — Liegt nun PM rechts, P″M″ aber links, und ist Q′ der Halbirungspunkt von P″P und x'' jetzt der Abscissen-Werth von P″, so wie x der von Q′, so hat man für diesen Fall $AP'' = -x''$,*) $AP = x'$ und $PP'' = AP + AP'' = x' + (-x'') = x' - x'' = -(x'' - x') = \pm(x' - x'') = \pm(x'' - x')$. — Und nun auch $AQ' = AP - PQ' = x' - \frac{x' - x''}{2} = \frac{x' + x''}{2}$, d. h. $x = \frac{x' + x''}{2}$.**)

Im letzten Falle, wo beide Linien P″M″ und P‴M‴ links der Ordinaten-Axe liegen, sey x' der Abcissen-Werth von P‴, x'' der von P″ und x der des Halbirungspunktes Q″ der Entfernung P″P‴, so hat man jetzt $x' = -AP'''$, $x'' = -AP''$ und $x = -AQ''$,

---

*) Es ist nehmlich jetzt x'' eine negative Zahl, also $-x''$ die absolute Zahl, durch welche die absolute Linie AP″ ausgedrückt werden muß.

**) Die Richtigkeit dieses Resultats müßte aber auch für den Fall dargethan werden, daß der Halbirungspunkt links von A fiele.

also $AP''' = -x'$, $AP'' = -x''$ und $AQ'' = -x$; dabei aber $AP''' - AP'' = P'''P''$, also $P'''P'' = -x' - (-x'') = x'' - x' = \pm(x' - x'')$, wo aber dasmal das (—) Zeichen gilt, weil $x' > x''$ (E. 13. 14.), also $x' - x''$ negativ ist, so daß $-(x' - x')$ die positive oder absolute Zahl $P'''P''$ gibt. Ferner ist in diesem Falle noch $AQ'' = AP'' + P''Q''$

$$= -x'' + \frac{x'' - x'}{2} = -\frac{x' + x''}{2}, \text{ aber auch } = -x; \text{ also abermals}$$

$$x = \frac{x + x'}{2}.$$

Man müßte aber nun doch noch, wollte man wirklich genügend untersucht haben, auch die Fälle untersuchen, wo eine der beiden Linien PM etc., mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt, während die andere links oder rechts fallen kann; und eben deshalb ist der systematische Gang im (§.) selbst, dem hier in der Note befolgten, bei weitem vorzuziehen.

§. 12. Zusatz.

Sind y' und y'' die Ordinaten-Werthe zweier mit der Abscissen-Axe paralleler übrigens beliebig liegender Linien UV und U'V' (Fig. 9.), und y der Ordinaten-Werth einer genau in der Mitte zwischen UV und U'V' liegenden dritten parallelen Linie UV, so ist allemal $\pm(y' - y'') =$ dem in der Richtung der Ordinaten genommenen Abstand der Linien UV und U'V' von einander, wo das (+) oder das (—) Zeichen gilt, je nachdem $y' \gtrless y''$ ist, weil der Abstand immer absolut (positiv) seyn muß; und zugleich ist allemal $\frac{y + y'}{2} =$ dem Ordinaten-Werth der dritten Linie UV.

Denn, was für die eine der Axen gesagt worden, kann ohne Abänderung auch für die andere der Axen wiederholt werden, weil sich die beiden Axen durch kein weiteres Merkmal von einander unterscheiden.

§. 13. Zusatz.

Sind also x' und y' die Coordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M, und eben so x'', y'' die Coordinaten-

Werthe eines zweiten Punktes N in der Ebene der Axen, so sind

$$\frac{x' + x''}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y' + y''}{2}$$

allemal die Coordinaten-Werthe des in der geraden Linie MN genau in der Mitte liegenden Punktes P, d. h. des Halbirungspunktes von MN.

Denn zieht man (Fig. 38.) MN′, M′N, MM′, NN′ mit den Axen AY, AX parallel, und dann noch durch den Halbirungspunkt P die mit AY und AX parallelen RS und TU, so liegt nach der Euklid'schen Geometrie TU genau in der Mitte zwischen MM′ und NN′, so wie RS genau in der Mitte zwischen MN′ und M′N, also ist $\frac{x' + x''}{2}$ nach (§. 11.) der Abscissen-Werth der Linie RS, und nach (§. 12.), $\frac{y' + y''}{2}$ der Ordinaten-Werth von TU; also sind

$$\frac{x' + x''}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y' + y''}{2}$$

Abscissen-Werth und Ordinaten-Werth des Punktes P, der in RS und TU zugleich liegt.

§. 13½.

Bemerkung. Hat man zwei Punkte (Fig. 10.) M und N in der ersten Region der Axen (welche auch den Winkel φ hat), so daß der erstere M gegeben ist durch die Coordinaten-Werthe $AP = x'$ und $PM = y'$, der andere N dagegen durch die Coordinaten-Werthe $AQ = x''$ und $QN = y''$, so bilden, wenn man MR parallel mit der Abscissen-Axe zieht, MR oder $x'' - x'$, NR oder $y'' - y'$ und MN das Dreieck MRN, welches den Winkel $MRN = \pi - \varphi$ hat (unter π zwei rechte Winkel oder 180° verstanden), so daß $\cos MRN = -\cos \varphi$ ist. — In diesem Dreieck ist aber nach dem allgemeinern Pythagor. Lehrsatze (E. 61. II.),

$$MN^2 = MR^2 + RN^2 - 2 . MR . RN . \cos MRN$$

oder

$$MN^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y')\cos\varphi;$$

also die Entfernung der beiden Punkte M und N oder

$$MN = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos\varphi},$$

wobei sich von selbst versteht, daß von der Wurzel nur der positive (oder vielmehr absolute) Werth gemeint seyn kann.

Es fragt sich daher, ob dies noch statt finden werde, auch wenn die Punkte M und N links oder unten, überhaupt ganz beliebig gegen die Axen liegen und x', y', desgleichen x'', y'' ihre Coordinaten-Werthe vorstellen.

Daher folgender

§. 14. Hauptlehrsatz.

Sind x', y' die Coordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M und x'', y'' die, eines andern beliebigen Punktes N, so ist allemal die Linie

$$MN = +\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos\varphi},$$

$$= +\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'').\cos\varphi},$$

wie auch die Punkte M und N gegen die Axen liegen mögen, wenn nur φ der Winkel ist, welchen die Coordinaten-Axen in der ersten Region (der positiven Abscissen- und Ordinaten-Werthe) mit einander bilden.

Beweis. Wie auch die Punkte M und N liegen mögen, so kann man sich doch immer (nach §. 10.) neue Coordinaten-Axen parallel mit den alten und so denken, daß die neuen Coordinaten-Werthe der Punkte M und N, nehmlich $x' - p$, $y' - q$ und $x'' - p$, $y'' - q$ (wo p und q die alten Coordinaten-Werthe des neuen Anfangspunkts sind) alle positiv werden; d. h. man kann die neue Ordinaten-Axe so weit links und die neue Abscissen-Axe so weit unterwärts gerückt denken, daß die Punkte M und N beide in die erste Region der neuen Axen fallen. Ist nun der, der neuen Ordinaten-Axe näher liegende Punkt durch M vorgestellt, der entferntere durch N, so ziehe man, unter der

Voraussetzung, daß (Fig. 10.) XAX′ und YAY′ die neuen Axen schon sind, daß also

$AP = x' - p$, $PM = y' - q$, $AQ = x'' - p$, $QN = y'' - q$

ist, die Linie MR parallel mit der Abscissen-Axe, und dann werden zwei Fälle statt finden: 1) entweder N liegt oberhalb MR oder 2) N liegt unterhalb MR etwa in N′.

Im erstern Falle ist

$$MR = AQ - AP = (x'' - p) - (x' - p) = x'' - x',$$
$$NR = QN - MP = (y'' - q) - (y' - q) = y'' - y',$$

W. $MRN = \pi - \varphi$, also $\cos MRN = -\cos \varphi$;

dabei aber, nach (E. 61. II.):

$$MN^2 = MR^2 + NR^2 - 2.MR.NR.\cos MRN,$$

also

$$MN^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos \varphi.$$

Im andern Falle hat man dagegen $QN' = y'' - q$, also

$$N'R = (y' - q) - (y'' - q) = y' - y'' = -(y'' - y');$$

aber auch W. $MRN' = \varphi$, und

$$MN'^2 = MR^2 + RN'^2 - 2.MR.RN'.\cos MRN';$$

also, weil $[-(y'' - y')]^2 = (y'' - y')^2$ ist,

$$MN'^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos \varphi.$$

In diesen beiden Fällen ist daher

$$MN = +\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos \varphi}.$$

Was nun endlich die andern Fälle betrifft, wo N mit R oder mit N″ oder N‴ zusammenfällt, so hat man im erstern Fall $MN = MR = x'' - x'$ und dasselbe gibt auch die Gleichung unsers Lehrsatzes, weil dann $y'' = y'$ also $y'' - y' = 0$ ist; in den andern Fällen dagegen wird $MN = MN'' = y'' - y'$ oder $MN = MN''' = y' - y''$ und genau dieselben Resultate gehen auch aus der Gleichung des Lehrsatzes hervor, weil dann $x'' = x'$, also $x'' - x' = 0$ ist.

Also ist der Lehrsatz ganz allgemein erwiesen für jede mögliche Lage der Punkte M und N gegen die Axen.

Note. Wollte man hier die frühern Hauptlehrsätze nicht zu Hilfe nehmen, sondern alle möglichen einzelnen Fälle, in denen die Punkte

M und N gegen die Axen eine verschiedene Lage haben, aufzählen, und dann die Richtigkeit unsers Lehrsatzes für jeden einzelnen Fall nachweisen, so würde dies wegen der großen Anzahl der Fälle, eine unverhältnißmäßige Mühe verursachen; abgesehen davon, daß leicht noch einzelne Fälle der Aufmerksamkeit des Zergliederers entgehen könnten.

Daß man auch schreiben könne

$$MN=+\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+2(x'-x'')(y'-y'')\cos\varphi},$$

folgt daraus, daß $(x''-x^I)^2=(x'-x'')^2$, $(y''-y')^2=(y'-y'')^2$ und auch $(x''-x')(y''-y')=(x'-x'')(y'-y'')$ ist. Dabei sind x', y', x'', y'' die Coordinaten-Werthe der Punkte M und N, und φ der Winkel, den die Axen in der ersten Region (der positiven Abscissen und Ordinaten) mit einander bilden.

§. 15. Zusatz.

Stehen die Axen auf einander senkrecht, ist also φ ein rechter Winkel, so ist $\cos\varphi=0$, und die obige Gleichung reducirt sich dann auf

$$MN=+\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}$$

oder

$$MN=+\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}.$$

Note. Dieses letztere Resultat gilt wiederum für, gegen die Axen ganz beliebig liegende Punkte M und N, wenn nur die Axen rechtwinklich sind. Für diesen speciellen Fall kann man jedoch das Resultat auch direkt aus der Figur ableiten; denn so wie φ ein rechter Winkel ist, so werden MRN und MRN′ rechte Winkel; daher sogleich

$$MN^2=MR^2+NR^2$$

oder

$$MN'^2=MR^2+N'R^2,$$

welches die obigen Gleichungen für diesen Fall sind.

Da man gerne senkrechte Axen zu Grunde legt (wo solches nehmlich angeht), so ist dieser spezielle Fall oft anwendbar, jedoch allemal sogleich aus dem allgemeinen Falle (§. 14.) zu ersehen, so daß es doch besser ist, bloß jene allgemeinere Formeln in das Gedächtniß zu prägen.

Anmerkung. Und sollte man die Formel des (§. 14.) selber vergessen haben, so verschaffe man sich solche nur für den speciellen Fall, welcher in der Bemerkung (§. $13\frac{1}{2}$.) betrachtet worden und als der einfachste anzusehen ist, weil der Lehrsatz (§. 14.) uns gelehrt hat, daß dieselbe Formel dann auch für alle

übrigen Lagen der Punkte gegen die Axen, ungeändert statt finden müsse.

§. $15\frac{1}{2}$.

Bemerkung. Sind (Fig. 10.) M, N zwei Punkte in der ersten Region, deren Coordinaten-Werthe x', y' und x'', y'' seyn sollen, so daß man hat:

$$AP = x', \quad PM = y', \quad AQ = x'', \quad QN = y'',$$

und sind x und y die Coordinaten-Werthe von einem Punkte S, so daß $AT = x$ und $ST = y$ ist, so ist, wegen der parallelen Linien

$$\frac{SV}{MV} = \frac{NR}{MR} \quad \text{oder} \quad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Ist dagegen in der Verlängerung von MN ein Punkt S' so gedacht, daß $AT' = x$, $T'S' = y$ seyn soll, so hat man, wiederum wegen der parallelen Linien

$$\frac{S'V'}{MV'} = \frac{NR}{MR} \quad \text{oder} \quad \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

d. h. abermals $$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Und ist endlich S'' ein Punkt in der Richtung MN, so daß $AT'' = x$ und $S''T'' = y$ ist, so hat man abermals

$$\frac{S''V''}{MV''} = \frac{NR}{MR} \quad \text{oder} \quad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Also existirt für jeden Punkt S, S' oder S'' der in der Richtung MN liegt, zugleich aber noch in der erſten Region, und dessen Coordinaten-Werthe x und y sind, allemal die Gleichung:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

oder $$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot (x - x')$$

oder $$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x + \frac{y'.x'' - y''.x'}{x'' - x'}$$

oder $$y = A.x + B,$$

wenn $\frac{y^{II}-y^{I}}{x^{II}-x^{I}}$ durch A, und $\frac{y^{I}.x^{II}-y^{II}.x^{I}}{x^{II}-x^{I}}$

durch B vorgestellt werden.

Es entsteht daher die Frage, ob dieselbe Gleichung auch noch statt findet, wenn x^{I} und y^{I}, desgleichen x^{II} und y^{II} die Coordinaten-Werthe zweier, gegen die Axen ganz beliebig liegender und gegebener Punkte M und N, und x und y die Coordinaten-Werthe eines in derselben geraden Linie MN, oder in einer ihrer Verlängerungen beliebig gedachten Punktes S (oder S^{I} oder S^{II}) sind. Daher folgender

§. 16. Lehrsatz.

Sind x^{I} und y^{I}, desgleichen x^{II} und y^{II} die Coordinaten-Werthe zweier beliebigen Punkte M und N (welche beliebig links, rechts, oben oder unten liegen mögen, in Bezug auf die in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander bildenden Axen); und sind x und y die Coordinaten-Werthe eines in der Linie MN oder in jeder beliebigen ihrer Verlängerungen ganz beliebig gedachten Punktes S (S^{I} oder S^{II}), so ist allemal

$$\frac{y-y^{I}}{x-x^{I}}=\frac{y^{II}-y^{I}}{x^{II}-x^{I}}=\frac{y-y^{II}}{x-x^{II}}$$

oder $$y-y^{I}=\frac{y^{II}-y^{I}}{x^{II}-x^{I}}(x-x^{I})=\frac{y^{I}-y^{II}}{x^{I}-x^{II}}.(x-x^{I})$$

oder $$y-y^{II}=\frac{y^{II}-y^{I}}{x^{II}-x^{I}}.(x-x^{II})=\frac{y^{I}-y^{II}}{x^{I}-x^{II}}.(x-x^{II})$$

oder $$y=A.x+B,$$

wenn $\frac{y^{II}-y^{I}}{x^{II}-x^{I}}$ oder $\frac{y^{I}-y^{II}}{x^{I}-x^{II}}$ durch A

und $\frac{y^{I}.x^{II}-y^{II}x^{I}}{x^{II}-x^{I}}$ oder $\frac{y^{II}.x^{I}-y^{I}.x^{II}}{x^{I}-x^{II}}$ durch B

vorgestellt wird.

Beweis. Denn denkt man sich neue Axen parallel mit den alten, deren Anfangspunkt die alten Coordinaten-Werthe p und q haben mag, so sind für die Punkte M, N und S die neuen Coordinaten-Werthe beziehlich (nach §. 9.)

$x' - p$, $y' - q$, u. $x'' - p$, $y'' - q$, u. $x - p$, $y - q$;

und dann kann man (nach §. 10.) p und q negativ und an sich groß genug nehmen, daß diese neuen Coordinaten-Werthe alle positiv werden (d. h. man kann die neuen Axen so weit nach der linken Seite und nach unten gerückt denken, daß nicht bloß die Punkte M und N, sondern auch der jedesmalige Punkt S in die erste Region der neuen Axen zu liegen kommt). Wird nun der, der Ordinaten-Axe zunächst liegende Punkt, durch M vorgestellt, so liegt N entweder über oder unter MR (etwa in N′) (Fig. 10.), und in jedem Falle mögen X′AX und Y′AY bereits die neuen Axen vorstellen, so daß man

$AP = x' - p$, $PM = y' - q$, $AQ = x'' - p$, $QN = y'' - q$, $AT = x - p$ und $ST = y - q$ hat; und dann geht der Satz aus den Gleichungen

$$\frac{SV}{MV} = \frac{S'V'}{MV'} = \frac{S''V''}{MV''} = \frac{NR}{MR}$$

unmittelbar hervor, in so fern p und q von selbst herausfallen, und zwar zunächst für den Fall, daß N über MR liegt. Liegt aber N unter MR, in N′, so geht dasselbe für die in MN liegenden Punkte s, s′ und s″ genau eben so hervor. — Und liegt N in R selbst, so findet noch immer dieselbe Gleichung statt, weil dann $y - y' = y - y'' = y'' - y' = 0$ in der That werden wird. — Dagegen müßte man der Gleichung

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \text{ diese Form } x - x' = \frac{x'' - x'}{y'' - y'}(y - y')$$

geben, wenn sie einen Sinn für den Fall behalten sollte, daß N in N″ oder in N‴ fiele, weil außerdem Nenner vorkämen, die Null wären, welcher Fall allemal die Vorsicht erfordert, das all-

gemeine Resultat für solchen Fall nicht als nothwendig wahr gelten zu lassen, sondern diesen speziellen Fall besonders und direkt zu behandeln. Man vergl. (E. 4.).

§. 17. Zusatz.

In einer jeden (durch zwei Punkte) gegebenen geraden Linie l, hat also jeder beliebige Punkt derselben die Eigenschaft, daß, wenn x und y seine Coordinaten-Werthe sind, zwischen selbigen die Gleichung statt findet: $y = A.x + B$

oder $y - y' = A.(x - x')$

oder $y - y'' = A.(x - x'')$,

während A und B durch dieselben zwei Punkte gegeben sind, durch welche die gerade Linie l selbst gegeben gedacht werden kann; so nehmlich, daß, wenn x', y' und x'', y'' die Coordinaten-Werthe zweier beliebigen Punkte dieser geraden Linie sind,

allemal $$A = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

und $$B = \frac{y'.x'' - y''.x'}{x'' - x'} = \frac{y''.x' - y'.x''}{x' - x''}$$

seyn wird und seyn muß, also daß A und B bekannt sind, wenn man die Coordinaten-Werthe zweier Punkte x', y' und x'', y'' gegeben hat.

Dieselbe Gleichung findet in derselben Form noch statt, wenn die Linie l mit der Abscissen-Axe parallel laufen, also $y'' = y' = y$ seyn sollte, weil sie sich dann in der That auf

$$y = 0.x + y' = 0.x + y''$$

reducirt, in so ferne dann $A = 0$ und $B = y'' = y'$ gefunden wird.

Dagegen findet dieselbe Gleichung nur in der umgeänderten Form

$$x - x' = \frac{1}{A}.(y - y') \text{ oder } x - x'' = \frac{1}{A}.(y - y'')$$

oder $$x = \frac{1}{A} y - \frac{B}{A}$$

noch statt, so oft l mit der Ordinaten-Axe parallel läuft, und reducirt sich dann auf $x = x'$ oder $x = x''$, in so ferne

dann $\frac{1}{A}$ oder $\frac{x'' - x'}{y'' - y'}$ auf Null

und $-\frac{B}{A}$ oder $-\frac{y' . x'' - y'' . x'}{y'' - y'}$ auf x' oder x''

sich reduciren.

Zweites Kapitel.

Von der analytischen Darstellung der Linien und von der analytischen Behandlung der geraden Linien, in Bezug auf zwei, sich unter einem beliebigen Winkel schneidende Coordinaten-Axen. Relationen zwischen den zu verschiedenen Axen-Paaren gehörigen Coordinaten-Werthen eines und desselben Punktes.

§. 18. Erklärung.

Eine Linie, sagt man, sey durch eine Gleichung zwischen x und y, welche sich auf bestimmte Coordinaten-Axen und auf einen bestimmten Maaßstab Z bezieht, gegeben, wenn jeder ihrer Punkte die Eigenschaft hat, daß seine Coordinaten-Werthe statt x und statt y gesetzt, die Gleichung identisch machen. Und jeder Punkt, dem diese Eigenschaft zukommt, wird als zu dieser Linie gehörig angesehen.

Allgemeiner: jeder Punkt, dessen Coordinaten-Werthe einer gegebenen Gleichung zwischen x und y genügen (wenn sein Abscissen-Werth statt x und sein Ordinaten-Werth statt y gesetzt wird), wird als durch diese Gleichung gegeben oder zu dieser Gleichung gehörig angesehen, für diese Axen und diesen Maaßstab.

Und die Gleichung selbst (zwischen den Coordinaten-Werthen eines jeden einzelnen beliebigen Punktes einer geraden oder krummen Linie) heißt dann die Gleichung dieser Linie.

Anmerkung 1. Zu einer Gleichung zwischen x und y kann daher gar kein Punkt gehören, wie z. B. zur Gleichung:

1) $(y+x)^2+1=0$ oder $y+x=\sqrt{-1}$,

weil es nie reelle Werthe von x und y gibt, welche dieser Gleichung genügen können, während nach (§. §. 4. und 5.) die Coordinaten-Werthe eines Punktes allemal reelle Werthe (positive oder negative Zahlen oder Null) seyn müssen.

Anmerkung 2. Es kann aber auch zu einer solchen Gleichung nur ein einziger Punkt gehören, wie z. B. zu den Gleichungen:

2) $y^2+x^2=0$ oder 3) $y^2-2by+b^2+x^2-2ax+a^2=0$,

wo a und b reell gedacht sind. Die (n. 2.) wird nehmlich nur durch das einzige Paar reeller Werthe $x=0$ und $y=0$ identisch, und es gehört also zu ihr bloß der Anfangs-Punkt der Coordinaten, und außer ihm gibt sie keinen zweiten Punkt mehr. Die Gleichung (n. 3.) dagegen läßt sich so schreiben:

$$(y-b)^2+(x-a)^2=0 \quad \text{oder} \quad y-b=(x-a)\sqrt{-1};$$

und es fällt in die Augen, daß sie nur durch das einzige Paar reeller Werthe $x=a$ und $y=b$ identisch gemacht werden könne, so daß also nur der einzige Punkt dazu gehört, dessen Abscissen-Werth a, und dessen Ordinaten-Werth b ist. —

Anmerkung 3. Ferner kann es Gleichungen zwischen x und y geben, zu welchen nur 2 Punkte gehören, oder nur 3 Punkte, oder überhaupt nur eine bestimmt gegebene Anzahl von Punkten; dahin gehören z. B. die Gleichungen:

4) $$y=\frac{b(x-c)-d(x-a)}{a-c}+\sqrt{-(x-a)^2(x-c)^2},$$

5) $$y=b\frac{(x-c)(x-e)}{(a-c)(a-e)}+d\frac{(x-a)(x-e)}{(c-a)(c-e)}+f\frac{(x-a)(x-c)}{(e-a)(e-c)}+\sqrt{-(x-a)^2(x-c)^2(x-e)^2},$$

6) $$y=b\frac{(x-c)(x-e)(x-g)}{(a-c)(a-e)(a-g)}+d\frac{(x-a)(x-e)(x-g)}{(c-a)(c-e)(c-g)}+f\frac{(x-a)(x-c)(x-g)}{(e-a)(e-c)(e-g)}+h\frac{(x-a)(x-c)(x-e)}{(g-a)(g-c)(g-e)}+\sqrt{-(x-a)^2(x-c)^2(x-e)^2(x-g)^2}$$

u. s. w. f.; unter der Voraussetzung daß a, b, c, d, e, f, g, h reell, d. h. positive oder negative Zahlen oder Null sind. — Denn da in diesen Gleichungen unter dem Wurzelzeichen ein negativ genommenes Quadrat vorkommt, so sind für jeden reellen Werth von x, die Werthe von y allemal imaginär, bloß diejenigen ausgenommen, welche den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen zu Null machen. Deshalb gibt die Gleichung (4.) für $x=a$ sogleich $y=b$ und für $x=c$ noch $y=d$; dagegen für jeden andern reellen Werth von x, das y imaginär. Also liefert die Gleichung (4.) nur zwei Punkte (a, b) und (c, d) *). — Eben so fällt aber in die Augen, daß die Gleichung (5.) nur die 3 Punkte (a, b), (c, d) und (e, f) bestimmt, während zur Gleichung (6.) nur die 4 Punkte (a, b), (c, d), (e, f) und (g, h) gehören; u. s. f.

Anmerkung 4. Zu einer Gleichung können aber auch stetig nebeneinander liegende Punkte gehören, in unendlicher Menge, also eine Linie, wie z. B. zu den Gleichungen

7) $y=a.x+b$ oder 8) $y=a,x^2+b,x+c,$

und dergl.; denn es fällt in die Augen, daß, wenn man in diesen Gleichungen, dem x stetig auf einander folgende Werthe beigelegt denkt, auch die Werthe von y allemal reell und stetig auf einander folgend gedacht werden müssen, wenn nur a, b, c, reelle Zahlen sind.

Anmerkung 5. Ferner kann es Gleichungen zwischen x und y geben, welche eine oder mehre Linien bestimmen, oder auch noch außerdem einzelne Punkte, wie z. B. die Gleichung:

9) $(y-ax-b).(y-cx-d)=0,$

d. h. $y^2-(a+c)xy+acx^2-(b+d)y+(ad+bc)x+bd=0$

*) Hier und in der Folge immer verstehen wir unter „dem Punkt (a, b)" allemal denjenigen, dessen Abscissen-Werth a und Ordinaten-Werth b ist. — Die Bedeutung von „Punkt (c, d)", „Punkt (e, f)" etc., fällt dann von selbst in die Augen.

(wo zu den auf einander folgenden Werthen von x, allemal die Werthe von y gehören, welche $y-ax-b=0$, aber auch diejenigen, welche $y-cx-d=0$ machen, während jede dieser beiden Reihen für sich eine Linie geben wird) — oder wie in der Gleichung:

$$10)\quad y=1+\sqrt{x-2}+\sqrt{-(x-2)^2(x-5)(x-8)},$$

welche, wegen $\sqrt{x-2}$, y imaginär liefert, sowohl für jeden negativen Werth von x, als auch für jeden positiven zwischen 0 und 2 liegenden. Für $x=2$ wird $y=1$; für alle Werthe von x zwischen 2 und 5, wird y wiederum imaginär; für $x=5$ wird $y=1+\sqrt{3}$; für alle Werthe von x zwischen 5 und 8 werden die Werthe von y alle reell; endlich für alle Werthe von x, >8 werden wiederum alle Werthe von y imaginär. Die Gleichung (10.) wird daher einen einzelnen Punkt (2, 1) liefern und noch zwei *) krumme Linien, welche von diesem Punkte (2, 1), und auch gewissermaaßen von einander getrennt sind, und welche zwischen den, durch die Endpunkte der Abscissen von 5 und von 8 Einheiten Länge hindurchgehenden, mit der Ordinaten-Axe parallelen Linien, ganz und vollständig liegen, (wie solches Fig. 11. zu sehen) während andere Punkte außerhalb dieser Grenzen zu derselben Gleichung nicht mehr gehören können. Der einzelne Punkt (2, 1) und die eben gedachten krummen Linien bilden daher ein zusammengehöriges, durch die Gleichung (10.) gegebenes (ebenes) Raumsystem; in so ferne alle Punkte desselben durch eine und dieselbe Gleichung (10.) gegeben und bestimmt sind.

Es ist aber hier überall, wie in der Folge immer, vorausgesetzt, daß ein und derselbe Maaßstab und auch dieselben Axen

---

*) Zwei krumme Linien entstehen deshalb, weil sich die eine ergibt, wenn man zuerst der $\sqrt{x-2}$ das (+) Zeichen gibt, und dann der nächsten Wurzel das (+) und (—) Zeichen zugleich; während die andere hervorgeht, wenn man der erstern Wurzel $\sqrt{x-2}$ das (—) Zeichen beilegt und dann wiederum der nächsten Wurzel das (+ und —) Zeichen zugleich gibt.

als ein für allemal gegeben und so lange unveränderlich dieselben bleibend als nicht das Gegentheil ausdrücklich verlangt wird, zu Grunde gelegt sind.

Note 1. In der geometrischen Zeichenkunst könnte man verlangen eine gegebene Gleichung z. B. $y=\frac{1}{4}x^2-8$ für gegebene, in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander bildende Axen und für einen gegebenen Maaßstab (Einheit) zu construiren, nämlich die Linie zu construiren, die durch diese Gleichung gegeben ist, d. h. deren Punkte alle die Eigenschaft haben, daß ihr Abscissen-Werth statt x und ihr Ordinaten-Werth statt y gesetzt, die gegebene Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2-8$ identisch machen. — Man würde aber, um dieser Forderung nachzukommen, links und rechts den Maaßstab (die Einheit) auf der Abscissen-Axe abtragen vom Anfangspunkt A aus (Fig. 12.) und durch die Theilpunkte Linien ziehen, parallel mit der Ordinaten-Axe; dann zu $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$ etc.
eben so zu $x=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,$ etc.
aus der gegebenen Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2-8$. die zugehörigen Werthe von y berechnen, so daß man das Schema erhält:

$$\begin{cases} x= & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \text{ etc.} \\ y= & -8, & -7\frac{3}{4}, & -7, & -5\frac{3}{4}, & -4, & -1\frac{3}{4}, & 1, & 4\frac{1}{4}, & 8, \text{ etc.} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} x= & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & -8, & \text{etc.} \\ y= & -7\frac{3}{4}, & -7, & -5\frac{3}{4}, & -4, & -1\frac{3}{4}, & 1, & 4\frac{1}{4}, & 8, & \text{etc.} \end{cases}$$

und nun $AA_I=8$ Einheiten, $BB_I=7\frac{3}{4}$, $CC_I=7$, $DD_I=5\frac{3}{4}$, $EE_I=4$, $FF_I=1\frac{3}{4}$, $GG_I=1$, $HH_I=4\frac{1}{4}$, $JJ_I=8$ solche Einheiten u. s. w. f. ferner $B'B'_I=7\frac{3}{4}$, $C'C'_I=7$, $D'D'_I=5\frac{3}{4}$, $E'E'_I=4$, $F'F'_I=1\frac{3}{4}$, $G'G'_I=4$, $H'H'_I=4\frac{1}{4}$, u. s. w. f. machen; und es sind dann A_I, B_I, C_I, D_I, E_I, F_I, G_I, H_I, J_I etc. desgleichen A'_I, B'_I, C'_I, D'_I, E'_I, F'_I, G'_I, H'_I, etc, Punkte, deren Coordinaten-Werthe der gegebenen Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2-8$ genügen, die also zu der gesuchten Linie gehören. Will man noch mehr zwischenliegende Punkte haben, so nehme man zwischenliegende Abscissen auf beiden Seiten von A, setze die daraus hervorgehenden Abscissen-Werthe statt x in die Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2-8$, berechne den zugehörigen Werth von y, und trage so viel Einheiten oberhalb oder unterhalb, auf der durch den Endpunkt der jedesmaligen Abscisse mit der Ordinaten-Axe parallel gezogenen Linie, ab, je nachdem der Abscissen-Werth y positiv oder negativ gefunden worden, und man wird abermals neue Punkte der zu construirenden Linie haben. — Zuletzt aber verbindet man diese einzelnen Punkte, so gut wie möglich, aus freier Hand.

Aus der Gleichung $y=\frac{1}{4}x^2-8$ folgt noch $x=\pm 2\sqrt{y+8}$ und deshalb kann man die Curve auch noch so construiren: Man

trägt auf der Ordinaten-Axe den Maaßstab (die Einheit) nach oben und nach unten zu ab, und berechnet für $y=0$, $y=1$, $y=2$, $y=3$, $y=4$, etc. desgleichen für $y=-1$, $y=-2$, $y=-3$, $y=-4$, etc. die zugehörigen Werthe von x, und trägt so viele Einheiten als der jedesmalige Werth von x hat (rechts oder links, je nachdem dieser Werth von x positiv oder negativ ist) auf derjenigen Linie ab, welche durch den Endpunkt der für y angenommenen Ordinate mit der Abscissen-Axe parallel gezogen worden. — Man erhält aber aus der Gleichung $x=\pm 2\sqrt{y+8}$, zu jedem Werth von y jedesmal 2 Werthe von x, den einen positv den andern negativ (so daß die zugehörigen Abscissen einander gleich sind, während die einen rechts, die andern links der Ordinaten-Axe getragen werden muß); und zwar erhält man für

$y=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7,$ etc.

beziehlich

$x=\pm 5{,}6;\ \pm 6;\ \pm 6{,}3;\ \pm 6{,}6;\ \pm 6{,}9;\ \pm 7{,}2;\ \pm 7{,}5;\ \pm 7{,}8,$ etc.

und für $y=-1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5;\ -6;$

$x=\pm 5{,}3;\ \pm 4{,}9;\ \pm 4{,}5;\ \pm 4;\ \pm 3{,}4;\ \pm 2{,}8;$

ferner für $y=-7;\ -8;$

$x=\pm 2;\ 0;$

während für alle negativen Werthe von y, die an sich größer als 8 sind, der zugehörige Werth von x imaginär wird, so daß nach unten zu kein Punkt der Curve weiter existirt. Auf diese Weise wird man aber zuletzt dieselbe Curve gezeichnet erhalten, welche man vorher auch erhalten hat; nur ist der erstere Weg deshalb bequemer, daher dem praktischen Zeichner mehr zu empfehlen, als es bei dieser gegebenen Gleichung viel leichter ist, zu den beliebig angenommenen Werthen von x, die zugehörigen Werthe von y zu berechnen, als umgekehrt zu den Werthen von y, die von x zu finden.

Note 2. Man übersehe nicht, daß die sogenannten imaginären Werthe blos deshalb keinen Punkt liefern, weil nach der Definition des (§. 19.) nur derjenige Punkt als zur Gleichung gehörig, oder als durch die Gleichung gegeben angesehen werden soll, dessen Coordinaten-Werthe der Gleichnug genügen; während nach der Definition des (§. 5.) unter Coordinaten-Werth allemal eine positive oder negative Zahl oder Null, d. h. eine sogenannte reelle Zahl verstanden werden muß. — So wie also zu einem reellen Werth von x, mithin zu einer bestimmten Abscisse, kein reeller (sondern ein imaginärer) Werth von y gefunden wird, so genügt dieser Werth von y in Verbindung mit dem angenommenen Werth von x, zwar der Gleichung, aber nicht noch den andern Bedingungen, namentlich nicht der, daß y ein Ordinaten-Werth des gesuchten Punktes, also eine positive oder negative Zahl oder Null seyn soll.

§. 19. Zusatz.

Bereits (§. 17.) haben wir gesehen, daß die Gleichung für jede gerade Linie, welche durch zwei Punkte (x', y') und (x'', y'') [d. h. durch die Coordinaten-Werthe dieser Punkte] gegeben ist, allemal von der Form wird: $y = A.x + B$ oder

$y - y' = A.(x - x')$ oder $y - y'' = A.(x - x'')$,

wo A und B durch die Coordinaten-Werthe x', y' desgleichen x'', y'' völlig bestimmt und gegeben sind, nehmlich

$$A = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

und $$B = \frac{y'.x'' - y''.x'}{x'' - x'} = \frac{y''.x' - y'.x''}{x' - x''}.$$

Jedoch muß man derselben Gleichung diese andere Form geben

$$x = \frac{1}{A}.y - \frac{B}{A}$$

oder $x - x' = \frac{1}{A}.(y - y')$ oder $x - x'' = \frac{1}{A}.(y - y'')$

so oft $x' = x''$ seyn sollte; dann wird nehmlich

$$\frac{1}{A} = 0 \text{ und } -\frac{B}{A} = \frac{y''.x' - y'.x''}{y'' - y'} = x' = x'',$$

und die Gleichung selbst reducirt sich auf

$x = 0.y + x'$ oder $x = x'$ oder $x = x''$.

Und in beiden Fällen, also für jede mögliche gerade Linie, kann die Gleichung auf die gemeinschaftliche Form gebracht werden

$$D.y + E.x + F = 0;$$

denn für $D = 0$ und $\frac{F}{E} = -x'$ geht solche in die letztere $x = x'$ über, während sie, wenn D nicht Null ist, für $\frac{E}{D} = -A$ und $\frac{F}{D} = -B$, in die erstere $y = A.x + B$ übergeht.

Bemerkung. Es frägt sich aber nun noch, ob auch umgekehrt jede Gleichung von der Form $D.y + E.x + F = 0$, unter der Voraussetzung, daß D, E und F reelle Zahlen sind,

jedesmal eine gerade Linie geben werde, d. h. ob alle Punkte, deren Coordinaten-Werthe, statt x und statt y gesetzt, dieser Gleichung $D.y+E.x+F=0$ genügen, auch jedesmal nothwendig in einer und derselben geraden Linie liegen werden. Daher noch folgender

§. 20. Lehrsatz.

Die Gleichung $D.y+E.x+F=0$, oder, wenn man $E=-D.A$ und $F=-D.B$ setzt, die Gleichung:

$$y=A.x+B \quad \text{oder} \quad x=\frac{1}{A}.y-\frac{B}{A}$$

gibt allemal eine gerade Linie, wenn sie auch auf beliebige, in der ersten Region den beliebigen Winkel φ mit einander bildende Axen, und auf einen beliebigen Maaßstab bezogen wird, so oft nur D, E und F oder A und B reell sind; d. h. es existirt allemal eine gerade Linie, deren Punkte alle die Eigenschaft haben, daß ihre Coordinaten-Werthe statt x und statt y gesetzt, der gegebenen Gleichung genügen, und außerhalb dieser geraden Linie existirt kein Punkt mehr, der zu derselben Gleichung gehören könnte, d. h. dessen Coordinaten-Werthe statt x und statt y gesetzt, derselben Gleichung genügen könnten.

Beweis. Ist D nicht Null, also die gegebene Gleichung auf die Form $y=-\frac{E}{D}.x-\frac{F}{D}$ zu bringen, wo $-\frac{E}{D}$ und $-\frac{F}{D}$ gegebene reelle Zahlen sind; so nehme man zwei beliebige Abscissen-Werthe x' und x'', berechne aus der gegebenen Gleichung $y=-\frac{E}{D}.x-\frac{F}{D}$ oder $y=A.x+B$, wenn $-\frac{E}{D}$ durch A und $-\frac{F}{D}$ durch B vorgestellt wird, die zugehörigen Ordinaten-Werthe y' und y'' (nämlich

1) $y'=A.x'+B$ und 2) $y''=A.x''+B$),

so sind dadurch zwei Punkte (x', y') und (x'', y'') bestimmt,

welche zur Gleichung $y = A.x + B$ gehören. Nun ist aber die Gleichung für die durch diese zwei Punkte gehende gerade Linie, nach (§. 19.):

$$(\odot) \quad y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.x + \frac{y'.x'' - x'.y''}{x'' - x'};$$

und weil, wie wenige Zeilen vorher zu sehen ist, die Gleichungen

$$y' = A.x' + B \quad \text{und} \quad y'' = A.x'' + B$$

statt finden, so folgt daraus, wenn man sie nach A und nach B auflöst, $A = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ und $B = \frac{y'.x'' - y''.x'}{x'' - x'}$;

und es fällt also, wie man sieht, die Gleichung $(\odot)$ für die durch die beiden Punkte (x', y') und (x'', y'') gehende gerade Linie, mit der gegebenen Gleichung $y = A.x + B$ genau zusammen. Also ist $y = A.x + B$ d. h. $y = -\frac{E}{D}.x - \frac{F}{D}$ oder $D.y + E.x + F = 0$, allemal die Gleichung für eine gerade Linie, wenn nur D nicht Null ist.

Ist aber $D = 0$, die gegebene Gleichung also bloß $0.y + E.x + F = 0$, so genügt ihr jeder Ordinaten-Werth statt y, und der einzige Abscissen-Werth $-\frac{F}{E}$ statt x, und dies ist für alle Punkte der geraden Linie der Fall, welche in der mit der Ordinaten-Axe parallelen Linie liegen, deren Abscissen-Werth $-\frac{F}{E}$ ist; so daß also die Gleichung

$$D.y + E.x + F = 0$$

auch in diesem Falle eine (aber mit der Ordinaten-Axe parallele) gerade Linie liefert.

Und da die Gleichung $D.y + E.x + F = 0$ für jeden Abscissen-Werth x, nur einen einzigen Ordinaten-Werth y, oder für jeden Ordinaten-Werth y nur einen einzigen Abscissen-Werth x liefert, so kann auch kein Punkt mehr existiren, dessen Coordinaten-Werthe statt x und statt y gesetzt, der gegebenen Gleichung $y = A.x + B$ genügen, und welcher nicht in dieser ge-

raden Linie (welche in jedem Falle durch die Gleichung $D.y+E.x+F=0$ gegeben ist) liegen müßte.

Note. Sollte in der geometrischen Zeichenkunst verlangt werden: die Gleichung $D.y+E.x+F=0$ oder $y=A.x+B$ zu construiren, so würde man blos auf die oben schon beschriebene Art zwei beliebige ihrer Punkte construiren, und dann solche mittelst des Lineals mit einander durch eine gerade Linie verbinden.

Wäre aber $D=0$, also die Gleichung selbst auf $E.x+F=0$ oder $x=-\frac{F}{E}$ reducirt, so würde man blos eine Abscisse abschneiden, dem absoluten Gliede von $-\frac{F}{E}$ gleich, und rechts oder links, je nachdem $-\frac{F}{E}$ eine positive oder eine negative Zahl wäre, und dann durch den Endpunkt dieser Abscisse mit der Ordinaten-Axe eine parallele Linie ziehen.

Wäre D nicht, dagegen $E=0$, so daß sich die Gleichung auf $D.y+F=0$ oder $y=-\frac{F}{D}$ reducirte, so würde man blos eine Ordinate abschneiden, gleich dem absoluten Gliede von $-\frac{F}{D}$ und nach oben oder nach unten zu, je nachdem $-\frac{F}{D}$ eine positive oder eine negative Zahl ist, und dann durch den Endpunkt dieser Ordinate eine Linie mit der Abscissen-Axe parallel ziehen, so würde diese Linie die verlangte seyn, weil die Coordinaten-Werthe aller ihrer einzelnen Punkte der Gleichung $D.y+0.x+F=0$ genügen würden.

Und wäre $D=0$ und zugleich $F=0$, also die gegebene Gleichung auf $E.x=0$ oder $x=0$ reducirt, so wäre die Ordinaten-Axe selber die verlangte Linie, weil die Coordinaten-Werthe aller ihrer Punkte, der Gleichung $0.y+E.x+0=0$ d. h. $x=0$ genügen.

Sollte endlich $E=0$ und $F=0$ seyn, die Gleichung daher auf $D.y=0$ oder $y=0$ sich reduciren, so wäre die Abscissen-Axe selbst die verlangte Linie, weil die Coordinaten-Werthe aller ihrer einzelnen Punkte der Gleichung $D.y+0.x+0=0$ genügen.

§. 21. Zusatz.

Ist zwischen Coordinaten-Werthen x und y eine Gleichung für eine gerade oder krumme Linie gegeben, so kann man für

jeden Abscissen-Werth irgend eines Punktes dieser Linie, statt x gesetzt, sogleich seinen Ordinaten-Werth y aus der Gleichung finden, und eben so zu dem gegebenen Ordinaten-Werth, der statt y gesetzt wird, aus der Gleichung sogleich seinen Abscissen-Werth erhalten.

Soll daher z. B. der Abscissen-Werth des Punktes gefunden werden, in welchem die durch $D.y+E.x+F=0$ gegebene gerade Linie die Abscissen-Axe trifft, so ist sein Ordinaten-Werth $y=0$ gegeben, also, wenn 0 in die Gleichung statt y gesetzt wird, der Abscissen-Werth des Durchschnittspunktes, $x=-\frac{F}{E}$. Und würde der Ordinaten-Werth gesucht, des Durchschnittspunktes der geraden Linie $D.y+E.x+F=0$ mit der Ordinaten-Axe, so wäre, für diesen Punkt, der Abscissen-Werth $x=0$, also aus der Gleichung, wenn 0 statt x gesetzt wird, der Ordinaten-Werth dieses Durchschnittspunktes,

$$y=-\frac{F}{D}.$$

Der erstere Durchschnittspunkt liegt daher rechts oder links des Anfangspunktes, je nachdem $-\frac{F}{E}$ positiv oder negativ ist; der zweite dieser Durchschnittspunkte liegt dagegen oberhalb oder unterhalb des Anfangspunktes, je nachdem $-\frac{F}{D}$ positiv oder negativ ist.

§. 22. Zusatz.

Ist dagegen $F=0$, so fallen beide Durchschnittspunkte im Anfangspunkt zusammen, so daß also, $D.y+E.x=0$ oder $y=A.x$ (wenn $-\frac{E}{D}$ durch A vorgestellt wird) allemal die Gleichung für eine gerade Linie ist, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht.

Aber auch umgekehrt gilt der Satz: für jede gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, hat

die Gleichung allemal diese einfachere Form $y = A.x$; eben weil dann für $x = 0$ auch $y = 0$ werden muß.

Anmerkung. Hat man die Gleichung

$$D.y + E.x + F = 0$$

auf die Form gebracht:

$$y = -\frac{E}{D}.x - \frac{F}{D} \quad \text{oder} \quad y = A.x + B,$$

so heißt A vorzugsweise der Coefficient der Gleichung.

§. 23. Allgemeine Aufgabe.

Es ist die Lage einer geraden Linie gegen bestimmte Axen auf irgend eine Art ausgesprochen und gegeben. Man soll die Gleichung dieser geraden Linie finden, auf diese Axen und auf einen gegebenen Maaßstab bezogen.

Auflösung. Man bestimme in jedem gegebenen einzelnen Falle die Coordinaten-Werthe zweier Punkte der gegebenen geraden Linie. Und sind x', y' die Coordinaten-Werthe des einen Punktes, x'' und y'' dagegen die Coordinaten-Werthe des andern, so ist die verlangte Gleichung, wenn x und y die Coordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes, also eines jeden Punktes dieser Linie vorstellen:

$$y - y'' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.(x - x'')$$

oder

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.(x - x')$$

oder

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.x + \frac{y'.x'' - x'.y''}{x'' - x'}.$$

Beispiel 1. Es seyen von der Linie DE (Fig. 13.) die beiden Durchschnittspunkte d und e derselben mit den Axen gegeben und zwar mittelst der Entfernungen Ad und Ae, so daß etwa $Ad = 4$, $Ae = 9$ Einheiten habe (oder allgemein $Ad = \alpha$ und $Ae = \beta$ Einheiten), so ist von dem Punkte d der Abscissen-Werth 0, der Ordinaten-Werth dagegen -4 (oder $-\alpha$); und von dem Punkte e sind die Coordinaten-Werthe $+9$ (oder $+\beta$) und 0. Substituirt man daher

statt	x', y',	x'', y''
beziehlich	$0, -4,$	$+9, 0,$
oder	$0, -\alpha,$	$+\beta, 0,$

so erhält man aus $y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}.(x-x')$, die gesuchte Gleichung

$$y+4=\frac{4}{9}.x, \quad \left(\text{oder} \quad y+\alpha=\frac{\alpha}{\beta}.x\right)$$

d. h. $9.y-4.x+36=0$, (oder $\beta.y-\alpha.x+\alpha\beta=0$),

oder $$y=\frac{4}{9}.x-4, \quad \left(\text{oder} \quad y=\frac{\alpha}{\beta}.x-\alpha\right)$$

für diese Linie DE, wo x und y die Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen ihrer Punkte vorstellen.

Beispiel 2. Von der Linie BC seyen abermal ihre Durchschnittspunkte b und c mit den Axen gegeben, und zwar $Ac=3$ und $Ab=3\frac{1}{2}$ Einheiten, oder allgemeiner $Ac=\alpha$ und $Ab=\beta$ Einheiten, so sind

$0, -3$ oder $0, -\alpha$ die Coordinaten-Werthe von c,

$-3\frac{1}{2}, -0$ oder $-\beta, \quad 0$ die Coordinaten-Werthe von b,

und demnach die gesuchte Gleichung für BC, unter der Voraussetzung daß x, y die Coordinaten-Werthe eines beliebigen, also eines jden ihrer Punkte vorstellen

$$y-0=\frac{3}{-3\frac{1}{2}}.(x+3\tfrac{1}{2}), \left(\text{oder} \quad y-0=\frac{\alpha}{-\beta}.(x+\beta)\right)$$

d. h. $$y=-\frac{6}{7}.x-3, \quad \left(\text{oder} \quad y=-\frac{\alpha}{\beta}.x-\alpha\right).$$

Beispiel 3. Weiß man, daß die Linie FG, deren Gleichung gesucht wird, mit der Ordinaten-Axe parallel läuft und die Abscissen-Axe in dem Punkte g schneidet, so daß $Ag=5$, oder $Ag=\alpha$ Einheiten hat, so ist die Gleichung für diese Linie: $x=-5$, (oder $x=-\alpha$);
d. h. $0.y+1.x+5=0$, (oder $0.y+1.x+\alpha=0$).

Beispiel 4. Desgleichen ist die Gleichung für die durch h hindurchgehende mit der Abscissen-Axe parallele Linie HJ, wenn $Ah=7$ oder $Ah=\alpha$ Einheiten hat und gegeben ist, jetzt $y=7$ und (oder $y=\alpha$);
d. h. $1.y+0.x-7=0$, (oder $1.y+0.x-\alpha=0$).

Beispiel 5. Von der Linie BC (Fig. 14.) ist der Durchschnittspunkt D durch die Linie $AD=\alpha$ Einheiten gegeben; außerdem der Winkel ψ, den selbige mit der Abscissen-Axe macht (und zwar derjenige der beiden Nebenwinkel $CDX=BDX'$ und $CDX'=BDX$, dessen Schenkel auf den positiven Seiten der Axen ins Unendliche sich erstrecken, hier

also W. CDX $= \psi$. Man soll die Gleichung dieser Linie BC finden; d. h. die Gleichung zwischen den Coordinaten-Werthen x und y eines jeden beliebigen Punktes derselben.

Hier sind die Coordinaten-Werthe $-\alpha$ und 0 des Punktes D bekannt, und daher nur noch von einem zweiten beliebig gedachten Punkte z. B. E die Coordinaten-Werthe zu finden. Dazu ist in dem Dreieck DAE bekannt: $AD = \alpha$, $W.DAE = 180° - \varphi$, $W.ADE = \psi$ und $W.AED = \varphi - \psi$, daher nach dem Trigonometrischen Satze (E. 61. I.)

$$sin\ AED : sin\ ADE = AD : AE$$

oder $$sin\ (\varphi - \psi) : sin\ \psi = \alpha : AE;$$

also $AE = \frac{\alpha . sin\ \psi}{sin\ (\varphi - \psi)}$, welches zugleich der Ordinaten-Werth des Punktes E ist, während sein Abscissen-Werth $= 0$ seyn muß.

Die gesuchte Gleichung für diese Linie BC ist daher, weil hier statt x', y', x'', y''

beziehlich $-\alpha$, 0, 0, $\frac{\alpha . sin\ \psi}{sin\ (\varphi - \psi)}$

gesetzt werden muß,

$$y = \frac{sin\ \psi}{sin\ (\varphi - \psi)} . (x + \alpha),$$

wenn x und y die Coordinaten-Werthe eines beliebigen, also eines jeden Punktes der Linie BC vorstellen.

Nimmt man an, daß $\varphi = 90°$ ist, also daß die Coordinaten-Axen senkrecht auf einander stehen, so ist nach (E. 60.) $sin\ (\varphi - \psi) = cos\ \psi$ und die gesuchte Gleichung für BC dann $y = tg\ \psi . (x + \alpha)$.

Beispiel 6. Wäre für die Linie FG (Fig. 14.) wiederum der Winkel $FDX = \psi_I$ gegeben, welchen die FG mit der Abscissen-Axe macht, und zwar derjenige, dessen beide Schenkel auf den positiven Seiten der Axen ins Unendliche sich erstrecken, und $AD = \alpha$, so hätte man

$$sin\ AHD : sin\ ADH = AD : AH,$$

oder weil $W.ADH = 180° - \psi_I$, $W.DAH = \varphi$

also $W.AHD = \psi_I - \varphi$ ist,

$$sin\ (\psi_I - \varphi) : sin\ \psi_I = \alpha : AH,$$

also $AH = \frac{\alpha . sin\ \psi_I}{sin\ (\psi_I - \varphi)}$, während dasmal $-AH$ der der Ordinaten-Werth von H ist.

Und weil der Abscissen-Werth von H, Null ist, so hat man dasmal

$$x' = -\alpha,\ y' = 0,\ x'' = 0,\ y'' = -\frac{\alpha . sin\ \psi_I}{sin\ (\psi_I - \varphi)} = \frac{\alpha . sin\ \psi_I}{sin\ (\varphi - \psi_I)}$$

(E. 54.); also die Gleichung für diese Linie FG:

$$y = \frac{\sin \psi_1}{\sin (\varphi - \psi_1)} . (x + \alpha)$$

oder

$$y = \frac{\sin \psi_1}{\sin (\varphi - \psi_1)} . (x - a),$$

wenn a den Abscissen-Werth $-\alpha$ vorstellt.

Und stehen die Axen aufeinander senkrecht, ist also $\varphi = 90°$, so geht diese Gleichung für die Linie FG in $y = tg\, \psi_1 . (x - a)$ über.

Note 1. In den beiden Beispielen (5. und 6.) konnte man die Gleichungen auch direkt finden. Nimmt man nehmlich im Falle des Beispiels (5.) einen beliebigen Punkt C an (Fig. 14.), setzt dessen Abscissen-Werth $AP = x$, Ordinaten-Werth $CP = y$, so ist $DP = x + \alpha = x - a$ (wenn a den Abscissen-Werth $-\alpha$ vorstellt) und daher in dem Dreieck CDP

$$CP : DP = \sin CDP : \sin DCP,$$

oder

$$y : x - a = \sin \psi : \sin (\varphi - \psi),$$

oder

$$y = \frac{\sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)} . (x - a),$$

Im Falle des Beispiels (6.) dagegen nimmt man einen beliebigen Punkt G, hat $AP = x$, $DP = x + \alpha = x - a$, $PG = -y$ *) und dabei

$$GP : DP = \sin GDP : \sin DGP$$

d. h.

$$-y : x - a = \sin \psi_1 : \sin (\psi_1 - \varphi),$$

oder

$$y = -\frac{\sin \psi_1}{\sin (\psi_1 - \varphi)} . (x - a) = \frac{\sin \psi_1}{\sin (\varphi - \psi_1)} . (x - a),$$

weil $\sin (\psi_1 - \varphi) = -\sin (\varphi - \psi_1)$ ist (E. 54.).

Note 2. Und war in den beiden Beispielen (5. und 6.) der Winkel φ ein rechter, so waren die Dreiecke DCP und DGP bei P rechtwinklich, also dann

$$1) \frac{CP}{DP} = tg\, CDP \quad \text{und} \quad 2) \frac{GP}{DP} = tg\, GDP.$$

Im Falle des Beispiels (5.) hat man aber

$$tg\, CDP = tg\, \psi, \quad CP = y, \quad DP = x - a,$$

also sogleich

$$\frac{y}{x - a} = tg\, \psi \quad \text{oder} \quad y = tg\, \psi . (x - a).$$

Im Falle des Beispiels (6.) dagegen ist

$$tg\, GDP = tg\, (180° - \psi_1) = -tg\, \psi_1;$$

---

*) Der Ordinaten-Werth y ist nehmlich dasmal eine negative Zahl, also $-y$ die absolute Zahl, welche das Maaß der Linie PG vorstellt.

dagegen aber auch $GP = -y$ und $DP = x - a$, also abermals,

$$\frac{y}{x-a} = tg\ \psi_1 \quad \text{oder} \quad y = tg\ \psi_1 . (x-a).$$

Note 3. Daß übrigens diese in den Noten mitgetheilten letztern Wege, die Gleichung der geraden Linie direkt aus der Figur zu finden, nicht systematisch sind, fällt in die Augen, so wie auch, daß man, wenn sie betreten werden, nicht befriedigend sich vergewissern kann, ob sich nicht die Form der Gleichung verändern könnte, wenn man bei der Annahme des Punktes (x, y) eine andere Figur, d. h. andere Dreiecke erhielte, was z. E. im Falle des (Beispiels 5.) statt gefunden hätte, wenn in der (Note 1.) der Punkt B statt C genommen worden wäre.

Beispiel 7. Von einer Linie FG (Fig. 14.) sind gegeben die Coordinaten-Werthe eines Punktes F, nehmlich $-AK = \alpha$ und $FK = \beta$, außerdem noch derselbe Winkel $FDX = \psi_1$, wie im (Beispiel 6.). — Man soll die Gleichung für diese Linie FG finden.

Man suche in dem Dreieck FKD die Linie KD, um dann die Abscisse AD des Punktes D zu erhalten. Man hat aber

$$FK : KD = sin\ FDK : sin\ KFD$$

oder
$$\beta : KD = sin\ \psi_1 : sin\ (\psi_1 - \varphi)$$

oder
$$KD = \frac{\beta . sin\ (\psi_1 - \varphi)}{sin\ \psi_1}; \qquad \text{daraus}$$

$$AD = AK - KD = -\alpha - \frac{\beta . sin\ (\psi_1 - \varphi)}{sin\ \psi_1} *),$$

also der Abscissen-Werth von D, nehmlich

$$-AD = \alpha + \frac{\beta . sin\ (\psi_1 - \varphi)}{sin\ \psi_1},$$

während der Ordinaten-Werth desselben D, $= 0$ ist.

Die Gleichung für die gegebene Linie FG wird daher jetzt, wo

$$x' = \alpha,\ y' = \beta,\ x'' = \alpha + \frac{\beta . sin\ (\psi_1 - \varphi)}{sin\ \psi_1}$$

und $y = 0$ ist,

---

*) Man habe nur immer im Auge, daß es weder positive noch negative Linien gibt, sondern daß jede Linie absolut ist, so wie jede Größe. — Der Abscissen-Werth α ist dasmal eine negative Zahl, daher $-\alpha$ einer absoluten Zahl und demnach dem Maaße der absoluten Linie AK- gleich.

$$y-\beta=-\frac{\sin\psi_1}{\sin(\psi_1-\varphi)}.(x-\alpha)$$

oder
$$y-\beta=\frac{\sin\psi_1}{\sin(\varphi-\psi_1)}.(x-\alpha).$$

Und ist φ ein rechter Winkel, so wird $\sin(\varphi-\psi_1)=\cos\psi_1$ (E. 60.); also die Gleichung für die Linie FG, welche durch den Punkt (α, β) geht und mit der Abscissen-Axe den Winkel ψ_1 bildet, jetzt

$$y-\beta=tg\,\psi_1.(x-\alpha),$$

wenn nur ψ_1 der Winkel ist, dessen Schenkel sich auf den positiven Seiten der Axen ins Unendliche erstrecken.

Note 1. Man konnte auch, um dieses Beispiel zu lösen, durch den Punkt F neue Axen FQ und FS legen parallel mit den alten und für irgend einen Punkt G den neuen Abscissen-Werth $FQ=x'$, den neuen Ordinaten-Werth $-GQ=y'$ setzen, so ist

$\mathfrak{W}.GFQ=180°-\psi_1$ und $\mathfrak{W}.FQG=\varphi$, so wie $\mathfrak{W}.FGQ=\psi_1-\varphi$; zuletzt aber $GQ:FQ=\sin GFQ:\sin FGQ$

d. h. $-y':x'=\sin\psi_1:\sin(\psi_1-\varphi)$,

also
$$y'=\frac{\sin\psi_1}{\sin(\varphi-\psi_1)}.x',$$

in so ferne $\sin(\psi_1-\varphi)=-\sin(\varphi-\psi_1)$ ist.

Aber nach (§. 9.), oder hier aus der Betrachtung der Figur, hat man: $y'=y-\beta$ und $x'=x-\alpha$; folglich

$$y-\beta=\frac{\sin\psi_1}{\sin(\varphi-\psi_1)}.(x-\alpha)$$

die Gleichung zwischen den alten Coordinaten-Werthen x und y eines jeden Punktes G der geraden Linie FG.

Note 2. Oder auch so: Wär- n hmlich G ein beliebiger Punkt der Linie FG, und FK parallel mit der Ordinaten-Axe, so hatte man $x=AP$ und $y=-GP$, also, weil $\alpha=-AK$ gegeben ist, $KP=AK+AP=x-\alpha$ und $FK=\beta$. —

Ferner ist $\mathfrak{W}.DKF=\varphi=\mathfrak{W}.GPD$,

und $\mathfrak{W}.KDF=\mathfrak{W}.GDP=180°-\psi_1$

so wie $\mathfrak{W}.DFK=\mathfrak{W}.DGP=\psi_1-\varphi$;

und $DK:FK=\sin DFK:\sin KDF$

oder $DK:\beta=\sin(\psi_1-\varphi):\sin\psi_1$

d. h.
$$DK=\frac{\beta.\sin(\psi_1-\varphi)}{\sin\psi_1},$$

also
$$DP=PK-DK=x-\alpha-\frac{\beta.\sin(\psi_1-\varphi)}{\sin\psi_1}.$$

Endlich aber ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DKF und DPG, $GP:DP=FK:DK$

d. h. $-y : x-\alpha-\frac{\beta.\ sin\ (\psi_1-\varphi)}{sin\ \psi_1}=\beta:\frac{\beta.\ sin\ (\psi_1-\varphi)}{sin\ \psi_1}$,

woraus die Gleichung sich ergibt:

$$-y.\frac{sin\ (\psi_1-\varphi)}{sin\ \psi_1}=x-\alpha-\frac{\beta.\ sin\ (\psi_1-\varphi)}{sin\ \psi_1},$$

oder $$y-\beta=-\frac{sin\ \psi_1}{sin\ (\psi_1-\varphi)}(x-\alpha),$$

oder $$y-\beta=\frac{sin\ \psi_1}{sin\ (\varphi-\psi_1)}.(x-\alpha).$$

Sind die Coordinaten-Axen rechtwinklich, also φ ein rechter Winkel, so ist $sin\ (\varphi-\psi_1)=cos\ \psi_1$ und daher dann die Gleichung für dieselbe Linie $y-\beta=tg\,\psi_1.(x-\alpha)$, während ψ_1 der Winkel ist, den die Linie FG mit der Abscissen-Axe macht, und zwar derjenige, dessen beide Schenkel nach den positiven Seiten der Axen hin ins Unendliche sich erstrecken.

Aber auch in diesem Falle kann man dasselbe Resultat einfacher direkt aus der Figur ableiten. Es ist nehmlich dann ohne weiters

$$\frac{GP}{DP}=\frac{FK}{DK}=tg\ .(180°-\psi_1)=-\ tg.\psi_1$$

und aus $$GP:FK=DP:DK$$

folgt sogleich $$GP+FK:DP+DK=GP:DP,$$

d. h $$(-y+\beta):(x-\alpha)=\frac{GP}{DP}=-\ tg\ \psi_1,$$

also $$y-\beta=tg\ \psi_1.(x-\alpha).$$

Note 3. Diese letztere Art, die Sache zu behandeln, kann vorzüglich dazu dienen, eine solche Gleichung sich zu verschaffen, wenn man sie braucht; ist aber nicht geeignet uns zu überzeugen, daß diese Gleichung für jeden andern Punkt G, etwa für den Punkt F, dieselbe geworden seyn würde. — In dieser letztern Beziehung dürfte daher der systematische Gang der Paragraphen selbst vorzuziehen seyn, in so ferne er allein hinlängliche Befriedigung zu gewähren scheint.

Note 4. Wenn man in dem letztern Beispiel (7.) $\alpha=\beta=0$ setzt, so findet sich die Gleichung für die Gerade, welche durch den Anfangs-Punkt der Coordinaten hindurch geht, und mit der Abscissen-Axe einen Winkel ψ bildet, folgende:

$$y=\frac{sin\ \psi}{sin\ (\varphi-\psi)}.x$$

oder wenn die Coordinaten-Axen auf einander senkrecht stehen sollten: $y=tg\ \psi.x$.

Was aber hier Beispielsweise gefunden worden, mag nun folgender Lehrsatz schärfer und bestimmter aussprechen.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie MN durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgeht, so bildet sie mit der Abscissen-Axe 4 Winkel, von denen jedoch je zwei am Scheitel einander entgegenstehende, einander gleich sind, so daß sie sich auf zwei verschiedene reduciren. Ist nun ψ derjenige dieser Winkel, dessen Schenkel auf den Seiten der positiven Coordinaten-Werthe *) (also auch derjenige, dessen Schenkel alle beide auf den Seiten der negativen Coordinaten-Werthe) sich in's Unendliche erstrecken; ist dagegen ψ_1 der andere dieser Winkel, dessen einer Schenkel, welcher mit der Abscissen-Axe zusammenfällt, auf der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Seite der Ordinaten-Axe, dessen anderer Schenkel dagegen auf der $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\\text{positiven}\end{matrix}\right\}$ Seite der Abscissen-Axe sich erstreckt (und welcher also der Nebenwinkel von ψ ist, so daß man $\psi + \psi_1 = 180°$ hat), so ist die Gleichung für diese gerade Linie,

wenn φ der Winkel ist, den die Coordinaten-Axen in ihrer ersten Region mit einander bilden:

$$\text{I)}\quad y = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} . x,$$

auch

$$\text{II)}\quad y = -\frac{\sin\psi_1}{\sin(\varphi + \psi_1)} . x,$$

dagegen, wenn $\varphi = 90°$ ist, d. h. wenn die Axen rechtwinklich sind;

$$1)\quad y = tg\,\psi . x$$

auch

$$2)\quad y = -tg\,\psi_1 . x.$$

Beweis. Es ist entweder $\psi < \varphi$ oder $\psi > \varphi$ oder $\psi = \varphi$; jedesmal aber ist die gesuchte Gleichung für die gerade Linie MN

---

*) So nehmlich, daß der Schenkel, welcher mit der Abscissen-Axe zusammenfällt, auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe, und der andere Schenkel auf der positiven Seite der Abscissen-Axe in's Unendliche sich erstreckt.

(nach §. §. 17. und 18.) von der Form: $y = A.x$, so daß nur A den gegebenen Bedingungen gemäß bestimmt werden muß.

Da aber diese Gleichung $y = Ax$ identisch werden muß, so oft man statt x und statt y die Coordinaten-Werthe eines Punktes der fraglichen Linie MN setzt, so gibt sie die Gleichung zur Bestimmung von A, nehmlich $A = \frac{y}{x}$, so oft von einem einzigen beliebigen Punkt M die Coordinaten-Werthe bekannt und unter x, y vorgestellt sind.

Ist nun $\psi < \varphi$ wie (Fig. 15.), wo $\psi = \text{W. MAX} = \text{W. NAX}'$ und $\psi_1 = \text{W. MAX}' = \text{W. NAX}$ ist, so ist für einen beliebigen Punkt M, wenn x, y seine Coordinaten-Werthe vorstellen, $AP = x$, $PM = y$, $\text{W. APM} = 180° - \varphi$,

$$\text{W. PAM} = \psi, \quad \text{W. AMP} = (\varphi - \psi),$$

und $$MP : AP = \sin MAP : \sin AMP,$$

d. h. $$y : x = \sin\psi : \sin(\varphi - \psi),$$

oder $$\frac{y}{x} = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}.$$

Also hat man, wegen $A = \frac{y}{x}$, jetzt $A = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}$.

Ist $\psi > \varphi$, wie in (Fig. 16.), so hat man

$\text{W. MPA} = \varphi$, $\text{W. MAP} = 180° - \psi$, $\text{W. AMP} = \psi - \varphi$,

$AP = -x$, $PM = y$ *) und $MP : AP = \sin MAP : \sin AMP$,

d. h. $$y : -x = \sin\psi : \sin(\psi - \varphi),$$

oder weil $$\sin(\psi - \varphi) = -\sin(\varphi - \psi)$$ ist,

$$y : x = \sin\psi : \sin(\varphi - \psi),$$

welches für A denselben Werth gibt, wie solcher kurz vorher schon gefunden worden.

In jedem dieser beiden Fälle ist also $y = A.x$ die Gleichung für die Gerade MN, während

---

*) Wenn nehmlich hier wiederum x und y die Coordinaten-Werthe des Punktes M vorstellen, so ist x dasmal eine negative Zahl, also $-x$. die positive oder vielmehr absolute Zahl, welche das Maaß der Linie AP ist.

$$A = \frac{\sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)}$$

gefunden wird, so daß dieselbe Gleichung auch so:

$$y = \frac{\sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)} . x$$

geschrieben werden kann.

Ist endlich $\psi = \varphi$, so fällt die Linie MN mit der Ordinaten-Axe zusammen und die Gleichung für selbige ist dann, weil y jeden Werth haben kann, $x = 0$. Und weil die Gleichung: $y = \frac{\sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)} . x$ oder

$$y . \sin (\varphi - \psi) = \sin \psi . x,$$

sich, weil nun $\sin (\varphi - \psi) = 0$ wird, ebenfalls auf $0 = x$ reducirt, so bleibt der Lehrsatz auch noch für diesen Fall gültig, wenn man nur die Gleichung, wie solches in ähnlichen Fällen allemal geschehen muß, so umformt, daß nicht Null als Divisor erscheint.

Es ist also die Gleichung (I.) des Lehrsatzes außer Zweifel gesetzt.

Weil aber $\psi + \psi_1 = 180°$, also $\psi = 180° - \psi_1$ ist; also $\sin \psi = \sin \psi_1$ und, wegen

$$\varphi - \psi = \varphi + \psi_1 - 180° = -[180° - (\varphi + \psi_1)],$$

auch $\sin (\varphi - \psi) = -\sin (\varphi + \psi_1)$ ist, so ist auch die Gleichung (II.) richtig.

Für den Fall endlich, daß $\varphi = 90°$ wird, hat man

$$\sin (\varphi - \psi) = \sin (90° - \psi) = \cos \psi,$$ und

$\sin (\varphi + \psi_1) = \sin (90° + \psi_1) = \sin (90° - \psi_1) = \cos \psi_1$; und daraus folgert die Richtigkeit der Gleichungen (1. und 2.).

§. 25. Zusatz.

Ist eben so μ der Winkel, welchen eine Linie MN mit der Ordinaten-Axe macht, so nehmlich, daß seine Schenkel sich auf den Seiten der positiven Coordinaten-Werthe in's Unendliche er-

strecken *), und ist μ_1 sein Nebenwinkel, so findet sich durch bloße Vertauschung der Coordinaten-Axen aus (§. 24.) die Gleichung für dieselbe gerade Linie:

$$x = \frac{\sin \mu}{\sin (\varphi - \mu)} . y,$$

und

$$x = - \frac{\sin \mu_1}{\sin (\varphi + \mu_1)} . y,$$

oder

$$\text{III. } y = \frac{\sin (\varphi - \mu)}{\sin \mu} . x,$$

und

$$\text{IV. } y = - \frac{\sin (\varphi + \mu_1)}{\sin \mu_1} . x,$$

während sich selbige auf

$$3)\ y = \cot g\, \mu . x,$$

oder

$$4)\ y = - \cot g\, \mu_1 . x$$

reduciren, so oft die Coordinaten-Axen rechtwinklich sind.

Note. Im Falle der Figur (15.) ist $\mu = \mathfrak{W}.MAY = \mathfrak{W}.NAY'$ und $\mu_1 = \mathfrak{W}.MAX' = \mathfrak{W}.NAY$. In der Figur (16.) dagegen ist $\mu = \mathfrak{W}.NAY = \mathfrak{W}.MAY'$ und $\mu_1 = \mathfrak{W}.MAY = \mathfrak{W}.NAY'$.

§. 26. Aufgabe.

Es ist gegeben eine gerade Linie MN durch die Gleichung:

$$y = a . x$$

auf gegebene Axen bezogen, die in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander bilden. Man soll die Winkel ψ und μ finden, welche diese Linie MN mit der Abscissen-Axe und mit der Ordinaten-Axe bildet, und deren Schenkel sich auf den positiven Seiten der Axen in's Unendliche erstrecken, gerade so wie solches in den (§. §. 24. und 25.) angenommen worden.

Auflösung. Man hat zur Bestimmung von ψ nach (§. 24.) die Gleichung:

$$\frac{\sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)} = a,$$

woraus

*) D. h. so, daß derjenige Schenkel, welcher mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt, auf der positiven Seite der Abscissen-Axe, der andre dagegen auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe sich in's Unendliche erstreckt.

$$\sin\psi = a.\sin\varphi.\cos\psi - a.\cos\varphi.\sin\psi,$$

oder $$tg\,\psi = a.\sin\varphi - a.\cos\varphi.tg\,\psi,$$

oder 1) $$tg\,\psi = \frac{a.\sin\varphi}{1 + a.\cos\varphi}$$ folgert.

Zur Bestimmung von μ dagegen hat man nach (§. 25.):

$$\frac{\sin(\varphi - \mu)}{\sin\mu} = a,$$

woraus auf demselben Wege

2) $$tg\,\mu = \frac{\sin\varphi}{a + \cos\varphi}$$ hervorgeht.

Anmerkung. Und weil nach der Annahme ψ, μ (so wie φ) hohle Winkel, d. h. spitze, rechte oder stumpfe, und diese Winkel durch ihre Tangenten ausgedrückt sind, so herrscht in Bezug auf die durch diese Winkel bestimmte Lage der Linie MN auch nicht die geringste Zweideutigkeit, weil ψ oder μ spitze oder stumpfe Winkel seyn werden, je nachdem ihre Tangenten positiv oder negativ gefunden worden seyn sollten, während die Schenkel von ψ und μ jedesmal auf den Seiten der positiven Coordinaten-Werthe sich erstreckend, gedacht sind.

Note. Wäre ψ oder μ durch seinen Sinus bestimmt, so wäre diese absolute Bestimmtheit der Lage der Linie MN mittelst einer solchen Angabe nicht vorhanden, weil zu demselben Sinus eben so gut ein spitzer als auch ein stumpfer Winkel gehören kann.

§. 27. Zusatz.

Wären aber die Axen rechtwinklich, also $\varphi = 90°$, so wären die Gleichungen zur Bestimmung der Winkel ψ und μ, welche die durch $y = x$ gegebene gerade Linie MN mit der Abscissen- und Ordinaten-Axe bildet, jetzt:

$$1)\ tg\,\psi = a$$

und $$2)\ tg\,\mu = \frac{1}{a},$$

die Winkel in dem oben gedachten Sinne genommen.

Note. Man konnte auch die Aufgaben (1. 26. 27.) direkt aus der Figur lösen. Es ist nehmlich (Fig. 15.) $AP = x$, $PM = y$, also $\frac{PM}{AP} = \frac{y}{x}$. Aber aus $y = a.x$ auch $a = \frac{y}{x}$, also $\frac{PM}{AP} = a$.

Endlich auch $PM : AP = \sin PAM : \sin PMA = \sin \psi : \sin(\varphi - \psi)$, also auch $a = \frac{\sin \psi}{\sin(\varphi - \psi)}$, woraus sich dann $tg\, \psi$ findet.

Und weil auch (Fig. 15.) $\mathfrak{W}.PAM = \psi = \varphi - \mu$, und $\mathfrak{W}.PMA = \mu$, also $PM : AP = \sin(\varphi - \mu) : \sin \mu$ ist, so folgt auch noch $a = \frac{\sin(\varphi - \mu)}{\sin \mu}$, woraus sich $tg\, \mu$ ergibt. Dies sind die Resultate des (§. 26.).

Sind aber die Coordinaten-Axen rechtwinklich, also $\varphi = 90° = \mathfrak{W}.APM$, und $\psi + \mu = 90°$ (Fig. 15.), so hat man in dem rechtwinklichen Dreieck APM, $\frac{PM}{AP} = tg\, \psi = cotg\, \mu$, und, wie oben gezeigt, auch $\frac{MP}{AP} = \frac{y}{x} = a$; also $a = tg\, \psi = cotg\, \mu$; welches die Resultate des (§. 27.) sind.

Daß die Wege der (§. §.) selbst, als die systematischen und in jeder Beziehung befriedigenden, vorzuziehen sind, fällt jedesmal sogleich in die Augen, da man hier immer nicht wissen kann, ob für einen andern Punkt M oder etwa für die (Fig. 16.) dieselben Resultate sich ergeben, während dort die Resultate ganz allgemein gültig erscheinen.

§. 28. Zusatz.

Auch folgt noch aus den (§. §. 25. 26.), wenn ψ und μ die Winkel sind, welche eine und dieselbe Linie MN mit der Abscissen-Axe und mit der Ordinaten-Axe bildet, in dem obigen Sinne genommen (des §. 24. und 25.),

$$\frac{\sin \psi}{\sin(\varphi - \psi)} = \frac{\sin(\varphi - \mu)}{\sin \mu},$$

woraus $\sin \psi . \sin \mu = \sin(\varphi - \psi) . \sin(\varphi - \mu)$,

oder, wenn man diese Produkte nach (E. 53.) in Summen verwandelt:

$$\cos(\psi + \mu) = \cos(2\varphi - (\psi + \mu)) = \cos 2\varphi . \cos(\psi + \mu) + \sin 2\varphi . \sin(\psi + \mu),$$

d. h. $$tg(\psi + \mu) = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = tg\, \varphi$$ folgert.

Es ist also $\psi+\mu=\varphi$ oder $\psi+\mu=180°+\varphi$; d. h.

wenn $\psi \leqq \varphi$, so ist $\psi+\mu=\varphi$,

wenn aber $\psi > \varphi$, so ist $\psi+\mu=180°+\varphi$.

Und ist $\varphi=90°$, d. h. sind die Coordinaten-Axen rechtwinklich, so ist $\psi+\mu=90°$, wenn ψ spitz,
oder $\psi+\mu=270°$, wenn ψ stumpf ist. Alles nach (E. 59.).

Note. Das erstere ist aber (Fig. 15.), das andere (Fig. 16.) der Fall, mögen die Axen schiefwinklich oder rechtwinklich seyn.

§. 29. Zusatz.

Ist μ' der Winkel, welchen die Linie $y=a.x$ oder MN mit der Ordinaten-Axe bildet, und zwar derjenige jedesmal, dessen einer Schenkel das Stück von MN ist, welches sich auf der positiven Seite der Abscissen-Axe in's Unendliche erstreckt, während der andere Schenkel der Theil der Ordinaten-Axe auf derselben positiven Seite der Abscissen-Axe genommen seyn soll, (also dessen beide Schenkel zugleich auf der positiven Seite der Abscissen-Axe liegen) so ist in (Fig. 15.) wo $\psi<\varphi$, $\mu'=\mu$; in (Fig. 16.) dagegen, wo $\psi>\varphi$, $\mu'=\mu_1=180°-\mu$. Im erstern Fall hat man also nach (§. 29.),
wenn $\psi<\varphi$ ist, $\psi+\mu'=\varphi$,
und im andern Falle nach demselben (§. 29.),
wenn $\psi>\varphi$ ist, $\psi-\mu'=\varphi$ oder $\psi+(-\mu')=\varphi$.
Um daher die für den Fall der Figur (15.) aus $\psi+\mu'=\varphi$ hervorgehenden analytischen Resultate auch für den andern Fall der (Fig. 16) gültig zu machen, wo $\psi-\mu'=\varphi$ ist, darf man nur in den erstern durchgehends $-\mu'$ statt μ' setzen.

So ist z. B. nach (§. 26.) für den Fall der (Fig. 15.) wo $\mu'=\mu$ und $\psi+\mu=\psi+\mu'=\varphi$ ist,

$$tg\,\mu = tg\,\mu' = \frac{sin\,\varphi}{a+cos\,\varphi},$$

daher für den Fall der (Fig. 16.), wo $\psi-\mu'=\varphi$ ist,

$$tg(-\mu') = -tg\,\mu' = \frac{sin\,\varphi}{a + cos\,\varphi},$$

oder

$$tg\,\mu' = -\frac{sin\,\varphi}{a + cos\,\varphi}.$$

Ist eben so ψ' der Winkel, den der auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe liegende Theil von MN (oder $y = a.x$) mit der ebenfalls positiven Richtung der Abscissen-Axe macht, so ist im Falle der (Fig. 15.) $\psi' = \psi$ und daher $\psi + \mu = \psi' + \mu = \varphi$; im Falle der (Fig. 16.) dagegen ist $\psi' = \text{W.NAX} = 180° - \psi$ und dabei $\psi + \mu = 180° + \varphi$ oder $\mu - \psi' = \varphi$. Was daher aus der vorausgesetzten Gleichung $\mu + \psi' = \varphi$ (Fig. 15.) abgeleitet worden, das muß auch für den andern Fall der (Fig. 16.) gelten, wo $\mu - \psi' = \varphi$ ist, d. h. wo aus der Gleichung $\mu - \psi' = \varphi$ abgeleitet werden soll, sobald man nur $-\psi'$ statt ψ' schreibt, weil dann die obere vorausgesetzte Gleichung:

$\mu + \psi' = \varphi$ in $\mu + (-\psi') = \varphi$ oder $\mu - \psi' = \varphi$

übergeht, also in die andere.

Man vergleiche damit das (Kap. XIV.) des ersten Theiles der Arithmetik, Algebra und Analysis.

Ist z. B. für den Fall der (Fig. 15.) wo $\psi' = \psi$ ist, aus $\mu + \psi' = \varphi$ abgeleitet worden nach (§. 26.)

$$tg\,\psi' = \frac{a.\,sin\,\varphi}{1 + a.\,cos\,\varphi},$$

so ist für den Fall der (Fig. 16.), wo $\mu - \psi' = \varphi$ ist,

$$tg(-\psi') = \frac{a.\,sin\,\varphi}{1 + a.\,cos\,\varphi},$$

oder

$$tg\,\psi' = -\frac{a.\,sin\,\varphi}{1 + a.\,cos\,\varphi}.$$

Note 1. Diese vorliegenden beiden Beispiele stimmen offenbar mit dem, was die bloße Ansicht der Figuren lehrt, überein. Daß aber die vermöge der vorliegenden Schlüsse in diesen Beispielen erhaltenen Endresultate zutreffen, hat man einzig und allein in dem Umstand zu suchen, daß die ersteren der Gleichungen, aus welchen die letzteren durch bloße Substitution von $-\mu'$ statt μ' oder von $-\psi'$ statt ψ' hervorgegangen, in der That blos aus den Gleichungen $\psi + \mu' = \varphi$ und $\mu + \psi' = \varphi$ abgeleitet sind. So wie nehmlich $\psi + \mu' = \varphi$ ist,

so ist $\mu' = \varphi - \psi$ und $tg\,\mu' = tg\,(\varphi - \psi) = \frac{tg\,\varphi - tg\,\psi}{1 + tg\,\varphi \,.\, tg\,\psi}$, woraus eben $tg\,\mu' = \frac{sin\,\varphi}{a + cos\,\varphi}$ hervorgeht, sobald man statt $tg\,\psi$ seinen Werth aus (§. 26. 1.) substituirt. — Eben so gibt die Gleichung

$$\mu + \psi' = \varphi, \quad \psi' = \varphi - \mu, \quad tg\,\psi' = \frac{tg\,\varphi - tg\,\mu}{1 + tg\,\varphi \,.\, tg\,\mu},$$

und dann $tg\,\psi' = \frac{a \,.\, sin\,\varphi}{1 + a \,.\, cos\,\varphi}$, wenn man statt $tg\,\mu$ ihren Werth aus (§. 26. 2.) substituirt. — Deshalb allein findet (Kapitel XIV.) der Arith., Alg. u. Analys. volle Anwendung.

Dergleichen spezielle Betrachtungen sind analytisch praktisch bequem, geben aber zur Annahme negativer Winkel Veranlassung, wenn man das, was (nach d. a. O.) analytisch (rein calculativ) unter gewissen Bedingungen gilt (also nur speciell), als allgemein gültig und namentlich als den Größen (hier den Winkeln) eigenthümlich statt finden lassen will. — Daß solche Annahmen nicht zugelassen werden dürfen, fällt von selbst in die Augen.

Um noch ein Beispiel zu geben, so leite man im Falle der (Fig. 15.) bei rechtwinklichen Coordinaten-Axen, aus $cos^2\psi + sin^2\psi = 1$, $cos^2\psi + cos^2\mu' = 1$ ab, in so ferne jetzt $\psi + \mu' = 90°$, also $sin\,\psi = cos\,\mu'$ seyn wird. — Setzt man nun hier $-\mu'$ statt μ' so ergibt sich, weil $cos\,(-\mu') = cos\,\mu'$ ist, abermal $cos^2\psi + cos^2\mu' = 1$, und diese Gleichung gilt also auch für den Fall der Figur (16.), wo $\psi - \mu' = 90°$ ist, sobald $\varphi = 90°$ genommen worden.

Es ist also bei rechtwinklichen Coordinaten-Axen allemal $cos^2\psi + cos^2\mu' = 1$, wenn ψ und μ' die Winkel sind, welche das auf der positiven Seite der Abscissen-Axe liegende Stück der geraden Linie MN, mit den auf den positiven Seiten in's Unendliche sich erstreckenden Abscissen- und Ordinaten-Axen bilden.

Und weil in (Fig. 15.) $\mu' = \mu$, in (Fig. 16.) aber $\mu' = \mu_I$ ist, also im ersten Fall $cos\,\mu' = cos\,\mu$ und im andern Falle $cos\,\mu' = cos\,\mu_I = cos\,(180° - \mu) = -cos\,\mu$, und daher in beiden Fällen $cos^2\mu' = cos^2\mu$ ist; da ferner auch $cos\,\psi = -cos\,\psi_I$ also $cos^2\psi = cos^2\psi_I$ ist, so ist bei rechtwinklichen Axen allemal $cos^2\psi + cos^2\mu = 1$, wenn ψ und μ die Winkel sind, welche eine Linie MN mit den beiden Axen bildet, mag jedesmal der eine oder sein Nebenwinkel darunter verstanden werden.

Note 2. Uebrigens machen wir noch darauf aufmerksam, daß es für die Resultate der (§§. 24. 25. 26.) viel bequemer ist, die Winkel ψ und μ einzuführen, als die Winkel ψ' und μ', weil man unter der erstern Annahme für beide Fälle der (Fig. 15.) und der (Fig. 16.)

jedesmal nur eine und dieselbe Formel erhält, während, wenn ψ' oder μ' gebraucht worden wären, für jeden der beiden Fälle eine eigene Formel sich ergeben hätte, folglich in der Formel selbst noch jeder der beiden Fälle hätte unterschieden werden müssen.

§. 30. Aufgabe.

Es sind gegeben die Gleichungen für zwei gerade Linien:

1) $y_1 = a_1 . x_1 + b_1$ und 2) $y_2 = a_2 . x_2 + b_2$,

wo x_1 und y_1 die Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes der ersten Linie, und x_2, y_2 die eines jeden beliebigen Punktes der zweiten Linie vorstellen, man soll die Coordinaten-Werthe x und y ihres Durchschnittspunktes finden.

Auflösung. In so ferne der Durchschnittspunkt zu beiden gegebenen Linien zugleich gehört, so müssen seine Coordinaten-Werthe x und y statt x_1 und y_1 gesetzt, die Gleichung (1.), dieselben aber auch statt x_2 und y_2 gesetzt, die Gleichung (2.) identisch machen, so daß man als identische Gleichungen ansehen muß die folgenden:

3) $y = a_1 . x + b_1$ und 4) $y = a_2 . x + b_2$.

Weil man aber nun 2 Gleichungen hat, zwischen denselben beiden noch unbekannten Werthen x und y, so darf man diese nur nach x und y auflösen, und man wird erhalten:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2}.$$

§. 31. Zusatz.

Da diese Werthe von x und y allemal reell werden und völlig bestimmt, so oft der Nenner $a_1 - a_2$ nicht Null, also so oft a_1 von a_2 verschieden ist, so existirt allemal ein Durchschnittspunkt der beiden Geraden

$$y_1 = a_1 . x_1 + b_1 \quad \text{und} \quad y_2 = a_2 . x_2 + b_2,$$

so oft a_1 von a_2 wirklich verschieden ist.

Ist dagegen $a_1 = a_2$, also $a_1 - a_2 = 0$, so gelten diese Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes nicht mehr

(nach E. 4.), und man muß diesen Fall direkt behandeln. Dann werden aber die Gleichungen (3. und 4.) des (§. 31.) jetzt:

5) $y = a_1 . x + b_1$ und 6) $y = a_1 . x + b_2$,

und wenn man aus beiden y eliminirt, so fällt das x von selbst mit weg, und die Eliminations-Gleichung wird $b_1 = b_2$. — Ist nun wirklich $b_1 = b_2$, so enthalten die beiden Gleichungen (5. und 6.) keinen Widerspruch, unterscheiden sich aber auch durch gar nichts von einander, so daß die zwei Gleichungen (1. u. 2.) in eine und dieselbe zusammenfallen, also nur eine gerade Linie geben. — Und ist nicht $b_1 = b_2$, so enthalten die Gleichungen (5. und 6.) einen Widerspruch, und da sie unter der Voraussetzung sich ergeben, daß beide gerade Linien

$y_1 = a_1 . x_1 + b_1$ und $y_2 = a_1 . x_2 + b_2$

einen Punkt gemein haben, so ist diese Voraussetzung für diese Linien unstatthaft. Also haben die Linien

$y_1 = a_1 . x_1 + b_1$ und $y_2 = a_1 . x_2 + b_2$

keinen Punkt mit einander gemein, d. h. sie sind mit einander parallel.

So oft also in den Gleichungen zweier Geraden, wenn sie beide auf die Form: $y = A . x + B$ gebracht sind, der Coefficient von x in beiden derselbe wird, so oft sind die Linien selbst mit einander parallel.

Umgekehrt: sind zwei Gerade mit einander parallel z. B.

$D . y_1 + E . x_1 + F = 0$ und $G . y_2 + H . x_2 + K = 0$,

so müssen auch, wenn man beide auf die Form $y = A . x + B$ bringt, so daß sie

$$y_1 = -\frac{E}{D} . x_1 - \frac{F}{D} \quad \text{und} \quad y_2 = -\frac{H}{G} . x_2 - \frac{K}{G}$$

werden, die Coefficienten von x_1 und x_2 einander gleich werden,

d. h. $$-\frac{E}{D} = -\frac{H}{G} \quad \text{oder} \quad \frac{E}{D} = \frac{H}{G}.$$

Denn so wie $\frac{E}{D}$ von $\frac{H}{G}$ noch verschieden ist, so finden sich reelle Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunkts aus

(§. 30.), also existirt dann auch allemal ein solcher Durchschnittspunkt und die Linien können nicht mehr mit einander parallel seyn.

Note. Man konnte auch so schließen: Weil $x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$ und $y = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2}$ die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunkts sind der beiden Linien $y_1 = a_1 . x_1 + b_1$ und $y_2 = a_2 . x_2 + b_2$; und weil der Werth eines Bruches desto größer wird, je kleiner sein Nenner $a_1 - a_2$, so werden die Coordinaten des Durchschnittspunktes desto größer, je weniger a_1 von a_2 verschieden ist, so daß also der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien von beiden Axen desto weiter abrückt, je näher a_2 und a_1 an einander rücken. Wird daher a_2 dem a_1 unendlich nahe rücken, so werden auch die Coordinaten des Durchschnittspunktes unendlich groß werden, der Durchschnittspunkt selbst also in's Unendliche hinausrücken, und so die Linien selbst dem parallelen Zustand in's Unendliche sich nähern; daher vermöge des in uns liegenden Uebergangsgesetzes, die Linien genau mit einander parallel, so bald a_1 mit a_2 genau zusammenfällt.

Anmerkung 1. Wir haben in den obigen beiden Gleichungen die Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes der erstern Linie durch x_1 und y_1, der zweiten dagegen durch x_2, y_2 vorgestellt. Wenn man aber wollte, so könnte man beide Coordinaten-Werthe bloß durch x und y vorstellen, die beiden Gleichungen (1.) und (2.) also schreiben:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2;$$

und man müßte dann nur nicht vergessen, daß die x und die y in der ersten Gleichung andere sind, als in der zweiten, so nehmlich daß, wenn man in jeder der beiden Gleichungen einerlei Abscissen-Werth für x sich gesetzt denkt, die zugehörigen Werthe von y verschieden sein werden, in so ferne das y in der ersten Gleichung, den Ordinaten-Werth des zum Abscissen-Werth x gehörigen Punktes der erstern Linie, das y in der zweiten Gleichung dagegen den Ordinaten-Werth des, zu demselben Abscissen-Werth gehörigen Punktes der zweiten Linie, vorstellt. Und nur für den Durchschnittspunkt beider Linien, würde zu dem Abscissen-Werth

dieses Durchschnittspunktes, statt x gesetzt, aus beiden Gleichungen einerlei Ordinaten-Werth für y sich ergeben, in so ferne dieser Punkt beiden Geraden gemein ist. — Denkt man sich daher unter x und unter y gerade die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes vorgestellt (die wir oben durch x und y bezeichnet haben), so gelten beide Gleichungen:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2$$

für dasselbe x und für dasselbe y, und können nun deshalb als zwei Gleichungen angesehen werden zwischen denselben beiden Unbekannten x und y, so daß sie nach x und nach y aufgelöst werden können. Dann erhält man aber

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2},$$

wo x und y nicht mehr die Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes der einen oder der andern Linie vorstellen, sondern, der Voraussetzung gemäß, einzig und allein die Coordinaten-Werthe des (beiden Linien gemeinschaftlichen) Durchschnittspunktes.

In der Folge werden wir, der Bequemlichkeit des Schreibens und des Setzens (Druckens) wegen, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil für nothwendig zu erachten ist, allemal von zwei oder mehr verschiedenen Linien, auch wenn sie mit einander in Verbindung gebracht werden, die Coordinaten-Werthe eines beliebigen also eines jeden ihrer Punkte, so lange sie sich auf dieselben Axen beziehen, durch dieselben Buchstaben z. B. x und y, ohne alle Unterscheidungszeichen ausdrücken; wir müssen aber dann nur nicht vergessen, daß dieselben Buchstaben x und y in jeder dieser, verschiedene Linien ausdrückenden Gleichungen, auch jedesmal andere Bedeutungen haben, und namentlich, daß, wenn man sich auch die Abscissen-Werthe x als dieselben denkt, dann doch die zugehörigen Ordinaten-Werthe y, in jeder dieser Linien so lange verschieden sein werden, als nicht der zugehörige Punkt ein Durchschnittspunkt der Linien, d. h. wirklich beiden Linien gemeinschaftlich ist.

Anmerkung 2. Nach einem Satze der Euklid'schen Geometrie, sind zwei gerade Linien mit einander parallel, wenn zwei parallele Abstände derselben einander gleich sind; und nach einem andern Satze sind auch umgekehrt, so oft zwei gerade Linien parallel sind, die parallelen Abstände einander gleich. Nimmt man diese Sätze zu Hilfe, so kann man sogleich auf einem neuen Wege ableiten:

1) Die durch die Gleichungen:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2$$

gegebenen geraden Linien (z. B. MM″ und NN″ Fig. 17.) sind mit einander parallel, so oft $a_1 = a_2$ ist, und umgekehrt;

2) sind zwei parallele Linien durch die Gleichungen:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2$$

gegeben, so muß auch $a_1 = a_2$ seyn.

Ist nehmlich im erstern Falle $a_1 = a_2$, so ist [wenn y_1 und y_2 die zu einerlei und beliebigem Werthe von x gehörigen Werthe von y vorstellen, y_1 in der erstern Linie (1. 1.) (Fig. 17.), y_2 in der andern Linie (2. 2.)] vermöge der gegebenen Gleichungen, nothwendig

$$\begin{array}{rl} & y_1 = a_1 . x + b_1 \\ \text{und} & y_2 = a_1 . x + b_2 \\ \hline \text{also} & y_1 - y_2 = b_1 - b_2 . \end{array}$$

Aber für $AP = x$, ist $y_1 - y_2$ der Abstand MN, für $AP' = x$, die Differenz $y_1 - y_2$ der Abstand M′N′ und für $AP'' = x$, ist $y_1 - y_2$ dem Abstande M″N″ gleich, alles nach (§. 12.). Folglich sind diese Abstände MN, M′N′, M″N″, etc. etc. unabhängig von x, alle einander gleich, nehmlich immer $= b_1 - b_2$; also die Linien (1. 1.) und (2. 2.) mit einander parallel.

Sind aber umgekehrt die Linien (1. 1. und 2. 2.) mit einander parallel gegeben, übrigens beziehlich durch die Gleichungen:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2$$

vorgestellt, so sind die Abstände MN, M′N′, M″N″ etc. einander gleich, also, wenn wiederum y_1 und y_2 die zu einerlei

beliebigem x gehörigen Ordinaten-Werthe beider Linien (1. 1. und 2. 2.) sind, nach (§. 12.) der Unterschied $y_1 - y_2$, d. h. $(a_1 - a_2).x + b_1 - b_2$ ein und derselbe und unabhängig von x, welches nicht anders möglich ist, als wenn der Coefficient $a_1 - a_2$ von x in diesem Unterschiede, $= 0$ wird.

§. 32. Zusatz.

Da die Gleichung $y = Ax + B$ die Gleichung ist für alle möglichen geraden Linien, welche Lage sie auch gegen die Axen haben mögen, und da aus dieser Gleichung alle geraden Linien, hinsichtlich ihrer Lage gegen die Axen hervorgehen, indem man nach und nach den Buchstaben A und B alle möglichen reellen Werthe beilegt; so kann man die beiden unbestimmten Coefficienten jedesmal noch so bestimmen, daß die dann durch die Gleichung $y = Ax + B$ vorgestellte gerade Linie, noch zweien Bedingungen genügt; etwa, daß sie durch 2 gegebene Punkte hindurchgehe, oder daß sie durch einen gegebenen Punkt hindurch und noch mit einer andern geraden Linie parallel laufe, und dergl. mehr.

Gibt man statt zweier Bedingungen, denen die Gleichung genügen soll, nur eine einzige, so wird man jedesmal unendlich viele gerade Linien erhalten, welche alle dieser einzigen Bedingung genügen.

Für die Folge bemerke man sich vorzüglich folgende Fälle:

1) Soll die gerade Linie durch einen gegebenen Punkt (α, β) gehen, so ist ihre Gleichung:

$$y - \beta = A.(x - \alpha),$$

wo A jeden möglichen reellen Werth vorstellt, so daß diese Gleichung unendlich viele und alle gerade Linien enthält, welche durch diesen gegebenen Punkt (α, β) hindurchgehen.

2) Soll die gerade Linie mit einer durch die Gleichung $y = a.x + b$ gegebenen geraden Linie parallel laufen, so ist ihre Gleichung: $y = a.x + B$, wo B noch jeden reellen Werth vorstellt, so daß diese letztere Gleichung unendlich viele

und alle gerade Linien enthält, welche mit der gegebenen $y = a.x + b$ parallel laufen.

§. 33. Zusatz.

Und daraus gehen dann mit Leichtigkeit noch folgende Sätze hervor:

1) Ist $y = a.x$ die Gleichung für eine beliebige gerade Linie, welche jedoch, weil sie für $x = 0$ auch $y = 0$ liefert, durch den Anfangspunkt der Coordinaten durchgehen muß, so ist die Gleichung der mit ihr parallelen Linie, welche die Ordinaten-Axe in einem Punkte schneidet, dessen Ordinaten-Werth $= b$ ist (sein Abscissen-Werth ist Null), nachstehende:

$$y = a.x + b.$$

Und die Gleichung der mit diesen Geraden parallelen aber zugleich durch den Punkt (α, β) hindurchgehenden Linien wird

$$y - \beta = a.(x - \alpha),$$

oder

$$y = a.x + (\beta - a.\alpha)$$ seyn.

Denn wegen des Parallelismus mit $y = a.x$ oder mit $y = a.x + b$, muß a auch jetzt wiederum der Coefficient von x bleiben; und weil die Linie durch den Punkt (α, β) noch durchgehen soll, so muß die gesuchte Gleichung für $x = \alpha$ nothwendig $y = \beta$, d. h. für $x - \alpha = 0$, nothwendig $y - \beta = 0$ liefern. *)

2) Und ist überhaupt:

$$y = a.x + b,$$

die Gleichung für eine völlig beliebige gerade Linie; so ist:

$$y = a.x$$

die Gleichung der mit dieser parallelen und zugleich durch den Anfangspunkt der Coordinaten hindurchgehenden Geraden, während

---

*) Man kann auch so schließen: die Gleichung einer jeden mit $y = a.x$ parallelen Linie ist: 1) $y = a.x + B$, wo B ganz beliebig. Soll nun unter allen diesen parallelen Linien diejenige herausgefunden werden, welche auch durch den Punkt (α, β) geht, so muß man B so bestimmt denken, daß 2) $\beta = a.\alpha + B$ wird. Subtrahirt man nun, um B zu eliminiren, die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man die verlangte.

$$y-\beta=a.(x-\alpha)$$

die Gleichung seyn wird, für die durch den Punkt (α, β) gehenden und mit den vorhergehenden parallelen Linien. Denn sie muß, wegen des Parallelismus mit $y=a.x$ denselben Coefficienten von x haben, nehmlich a, und sie muß auch für $x=\alpha$, $y=\beta$ liefern.

3) Deshalb ist die Gleichung für jede beliebige Gerade, welche mit der Abscissen-Axe den Winkel ψ, mit der Ordinaten-Axe aber den Winkel μ bildet (die Schenkel dieser Winkel auf den positiven Seiten der Axen gedacht, wie §. §. 25. 26.), nach denselben (§. §. 25. und 26.), jetzt

$$y=\frac{sin\ \psi}{sin\ (\varphi-\psi)}.x+b,$$

oder auch

$$y=\frac{sin\ (\varphi-\mu)}{sin\ \mu}.x+b,$$

wo b jeden möglichen Werth haben kann. Und soll dieselbe Linie noch durch den Punkt (α, β) hindurchgehen, so ist ihre Gleichung:

$$y-\beta=\frac{sin\ \psi}{sin\ (\varphi-\psi)}.(x-\alpha),$$

oder auch

$$y-\beta=\frac{sin\ (\varphi-\mu)}{sin\ \mu}.(x-\alpha)\ *).$$

Denn parallele Linien bilden mit jeder dritten Linie, also auch mit jeder der Axen, gleiche Winkel; und gerade Linien, welche mit einer und derselben dritten Linie gleiche Winkel bilden, übrigens in einerlei Ebene liegen, sind auch nothwendig mit einander parallel.

Note. Ohne diesen eben ausgesprochenen Satz der Euklid'schen Geometrie zu Hülfe zu nehmen, darf man im (§. 24. und §. 25.) statt der dortigen Linie $y=a.x$, nur sogleich die beliebige $y=a.x+b$ nehmen, übrigens genau so, wie dort geschehen, verfahren, und die Endresultate werden sich von b als völlig unabhängig ausweisen (in

*) Man muß nur in den Anwendungen dieser Formeln genau Acht haben, in welchem Sinne die Winkel ψ und μ gedacht sind, um nicht ihre Nebenwinkel statt der hier gemeinten zu nehmen.

so ferne b überall aus den Formeln von selber herausfallen wird), so daß man eben daraus im rein analytischen Geiste den Satz folgern kann: „Daß alle mit einander paralle Linien mit den Axen dieselben Winkel bilden."

4) Und umgekehrt, sind

$$y = a.x + b \quad \text{und} \quad y - \beta = a.(x - \alpha)$$

Gleichungen für beliebige (parallele) gerade Linien, so hat man zur Bestimmung der Winkel ψ und μ, welche sie im Sinne der (§.§. 25., 26. und 27.) mit den Axen bilden, die Gleichungen:

$$\frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi - \psi)} = a \quad \text{und} \quad \frac{sin\,(\varphi - \mu)}{sin\,\mu} = a,$$

so daß

$$tg\,\psi = \frac{a\,.\,sin\,\varphi}{1 + a\,.\,cos\,\varphi} \quad \text{und} \quad tg\,\mu = \frac{sin\,\varphi}{a + cos\,\varphi}$$

sich ergibt.

Für rechtwinkliche Axen wird $tg\,\psi = a$ und $tg\,\mu = \frac{1}{a}$;

immer und durchaus unter ψ denjenigen der Nebenwinkel verstanden, welchen der auf der positiven Seite der Abscissen-Axe in's Unendliche sich erstreckende Theil der Linie ($y = a.x + b$ oder $y - \beta = a.(x - \alpha)$) mit der positiven Richtung derselben Axe bildet; so wie unter μ derjenige Winkel gedacht werden muß, den der auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe in's Unendliche sich erstreckende Theil der graden Linie mit der positiven Richtung derselben Axe macht.

Anmerkung 1. Die Gerade, mit welcher eine andere parallel gelegt werden soll, kann durch eine Gleichung von der Form:

1) $D.y + E.x + F = 0$ gegeben seyn. In diesem Falle müßte man der Gleichung erst die obige Form:

$$2)\ y = -\frac{E}{D}.x - \frac{F}{D}$$

geben, und dann würde jede mit ihr parallele Linie durch die Gleichung:

$$3)\ y = -\frac{E}{D}.x - C,$$

d. h. 4) $D.y + E.x + C = 0$ ausgedrückt seyn, wo C

völlig beliebig ist. Und wenn dann diese Linie noch durch den Punkt (α, β) hindurchgehen soll, so muß man C noch so bestimmt denken, daß 5) $D.\beta+E.\alpha+C=0$ wird, so daß also, wenn man C durch bloßes Subtrahiren der Gleichungen (4. u. 5.) eliminirt, die Gleichung der, mit $D.y+E.x+F=0$ parallelen und durch den Punkt (α, β) hindurchgehenden geraden Linie $D.(y-\beta)+E.(x-\alpha)=0$ werden wird; eine Form, die man auch erhalten haben würde, wenn man nach der Auflösung der (n. 2.) des vorstehenden (§.): $y-\beta=-\frac{E}{D}.(x-\alpha)$ genommen, und dann diese Gleichung auf 0 gebracht hätte.

Anmerkung 2. Man konnte auch die Aufgabe: „Die Gleichung (zwischen den Coordinaten-Werthen x und y eines jeden beliebigen Punktes) einer geraden Linie zu finden, welche mit der durch die Gleichung $y=a.x+b$ gegebenen geraden Linie parallel läuft und noch überdies durch den Punkt (α, β) hindurch geht" direkt geben und sie direkt, wie folgt, lösen.

Die gesuchte Gleichung ist nothwendig in der Gleichung:

$$1)\ y=A.x+B,$$

welche alle möglichen geraden Linien liefert, wenn dem A und dem B alle möglichen reellen Werthe beigelegt werden, enthalten; so daß nur noch die Unbestimmten A und B so bestimmt werden müssen, daß die Linie unter allen gerade den beiden, in der Aufgabe gegebenen Bedingungen entspricht. Und es stellt also die Gleichung (1.) bereits die gesuchte Gleichung vor, sobald man sich unter A und B die gehörigen, zur Zeit aber noch unbekannten Werthe denkt. Unter dieser Voraussetzung müssen aber α und β statt x und y gesetzt, die Gleichung (1.) identisch machen, so daß also

$$2)\ \beta=A.\alpha+B$$

seyn muß. Und weil die Linie (1.) mit der oben gegebenen $y=a.x+b$ parallel seyn soll, so hat man auch noch

$$3)\ A=a.$$

Findet man aus (2. und 3.) die Werthe für A und für B und

setzt solche in die Gleichung (1.), oder was dasselbe ist, eliminirt man A und B aus den 3 Gleichungen (1—3.), so erhält man nothwendig die verlangte.

Es gehen aber die Gleichungen (1. und 2.) wenn man statt A den Werth aus (3.) setzt in

$$y = a.x + B$$

und

$$\beta = a.\alpha + B$$

über; und eliminirt man aus diesen beiden noch B, dadurch daß man beide von einander subtrahirt, so ergibt sich als gesuchte Gleichung: $y - \beta = a.(x - \alpha)$.

§. $33\frac{1}{2}$.

Bemerkung. Sind gegeben (Fig. 18.) zwei Linien M′AM und N′AN durch ihre Gleichungen z. B. M′AM durch die Gleichung $y = a_1.x$ und N′AN durch die Gleichung $y = a_2.x$, und wollte man den Winkel ψ bestimmen, welchen diese Linien mit einander machen, so müßte man in AM einen Punkt B mittelst seiner Coordinaten-Werthe $AQ = b$, $QB = a_1.b$, und eben so in AN einen Punkt C mittelst seiner Coordinaten-Werthe $AP = c$ und $PC = a_2.c$ bestimmen, und nun die Entfernungen der 3 Punkte A oder (0, 0), B oder (b, $a_1.b$) und C oder (c, $a_2.c$) paarweise von einander, finden, nach (§. 14.), um die Länge der Seiten AB, AC und BC zu erhalten; und hernach hätte man nach dem allgemeinen Pythagorischen Lehrsatze (E. 61. II.):

$$\cos\psi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}.$$

Und weil die Punkte B und C willkührlich angenommen werden können, so kann man sie auch so nehmen, daß sie beide einerlei Abscissen-Werth c haben, so daß dann die Linie

$$B_1C = CP - B_1P = a_2.c - a_1.c = (a_2 - a_1)c$$

wird. — Dies führt uns zu der allgemeinen

§. 34. Aufgabe.

Es sind gegeben zwei gerade Linien durch die Gleichungen:

$y = a_1 . x + b_1$ und $y = a_2 . x + b_2$.

Man soll den Winkel ψ finden, den solche mit einander bilden.

Auflösung. Zuvörderst bemerke man, daß diese Linien und alle mit ihnen parallele Linien einen und denselben Winkel ψ mit einander bilden. Es wird daher bequemer seyn, statt der gegebenen Geraden lieber diese andern:

1) $y = a_1 . x$ und 2) $y = a_2 . x$

zu nehmen, welche beide durch den Anfangspunkt der Coordinaten durchgehen und mit den gegebenen Linien beziehlich parallel laufen, also denselben Winkel ψ mit einander bilden.

Der Gang des Verfahrens ist nun folgender: Man nimmt in jeder der beiden Geraden einen beliebigen Punkt an (dadurch, daß man einen beliebigen Abscissen-Werth statt x nimmt und dann aus der Gleichung für diese Gerade den Ordinaten-Werth dazu berechnet; in jeder derselben kann dabei ein anderer oder eben derselbe Abscissen-Werth gedacht werden. Dann hat man, außer dem Durchschnitts-Punkte, dessen Coordinaten-Werthe (0, 0) sind, noch in jeder Linie die Coordinaten-Werthe eines ihrer Punkte. Daraus findet man nach (§. 14.) die 3 Seiten des durch diese 3 Punkte gegebenen Dreiecks, ihrer Länge nach; und daraus dann, nach den allgemeinern Pythagorischen Lehrsatze der Trigonometrie (d. h. nach E. 61. II.) auch *cos* ψ.

Indem wir diesen Gang nun durchführen, suchen wir ihn noch dadurch zu vereinfachen, daß wir für beide gegebene Gerade (1. und 2.) einen und denselben Abscissen-Werth x und diesen positiv nehmen, so daß die dazu gehörigen Punkte der einen und der andern Geraden, eine mit der Ordinaten-Axe parallele Seite des gegebenen Dreiecks bilden. Bezeichnen wir nun den Anfangs-Punkt der Coordinaten durch A, den in der ersten Linie $y = a_1 . x$ angenommenen Punkt durch B, und den in der 2ten Geraden $y = a_2 . x$ angenommenen Punkt durch C, so sind

0, 0	die Coordinten-Werthe des Punktes	A,
x, $a_1 . x$	= = = = =	B,
x, $a_2 . x$	= = = = =	C;

also nach (§. 14.):

$$AB = +\sqrt{x^2 + a_1^2 . x^2 + 2a_1 . x^2 \cos\varphi} =$$
$$= +x\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi},$$
$$AC = +\sqrt{x^2 + a_2^2 . x^2 + 2a_2 . x^2 . \cos\varphi} =$$
$$= +x\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi},$$
$$BC = +\sqrt{(a_2 . x - a_1 . x)^2} = \pm x . (a_2 - a_1),$$

wo die Wurzeln alle ihre positiven Werthe vorstellen (ihre absoluten), weil x positiv angenommen worden (wo aber die Wurzeln: $\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos\varphi}$ und $\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$ ihre negativen Werthe vorstellen müßten, wenn man x selbst negativ gedacht hätte), wo endlich in dem Ausdruck für BC das (+) oder das (—) Zeichen gilt, je nachdem $a_2 - a_1$ positiv oder negativ ist; in so ferne AB, AC, BC immer positiv oder vielmehr absolut seyn müssen.

Nun hat man:

$$\cos\psi = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC . AB},$$

d. h. wenn man obige Werthe substituirt:

$$\text{I. } \cos\psi = \frac{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi}{+\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi} \times +\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}}.$$

Weil aber $\sin = \pm\sqrt{1 - \cos^2}$, so erhält man noch aus (I.):

$$\text{II. } \sin\psi = \frac{\pm(a_1 - a_2) . \sin\varphi}{+\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi} \times +\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}},$$

wo, weil $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ immer positiv seyn müssen, das (+) oder das (—) Zeichen genommen werden muß, je nachdem $a_1 > a_2$ oder $a_1 < a_2$ ist. Und aus

$$tg\,\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \quad \text{und} \quad cotg\,\psi = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} \quad \text{folgt noch:}$$

$$\text{III. } tg\,\psi = \frac{\pm(a_1 - a_2) . \sin\varphi}{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi},$$

$$\text{IV. } cotg\,\psi = \frac{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi}{\pm(a_1 - a_2) . \sin\varphi},$$

wo immer für das (+) oder (—) Zeichen dieselbe Bedingung statt findet, wie sie für (II.) angegeben worden.

Und dies ist der Winkel ψ, welchen die Linien

$$y = a_1 . x \quad \text{und} \quad y = a_2 . x$$

mit einander machen, und zwar die Richtungen dieser Linien, welche sich beide auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe ins Unendliche erstrecken. Und dabei findet sich, da die Wurzeln ihre bestimmten positiven Werthe vorstellen, das Zeichen (+ od. —) des $cos\,\psi$ völlig bestimmt, also jedesmal völlig bestimmt, ob dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer seyn werde.

Und denselben Winkel ψ bilden nun auch die beiden Linien:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2$$

mit einander.

Anmerkung 1. Dieselbe Formel (I.) für $cos\,\psi$ drückt aber zugleich auch alle 4 Winkel aus, welche von den beiden gegebenen Linien um den Punkt A herum gebildet werden, wenn man unter den Wurzeln im Nenner, bald ihre positiven, bald aber auch ihre negativen Werthe vorgestellt denkt. Man konnte nehmlich B zu einem negativen Werth von x nehmen; dann wurde x negativ in der Formel für die absolute AB, also war auch dann der andere Faktor $\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1^2 . cos\,\varphi}$ negativ zu nehmen. Aber zugleich nahm man dann auch die Linie $y = a_1 . x$ in ihrer Verlängerung links der Ordinaten-Axe, bekam also nicht mehr den vorigen Winkel, sondern seinen Nebenwinkel. Dasselbe gilt natürlich auch umgekehrt; sobald für die Wurzel $\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . cos\,\varphi}$ ihr negativer Werth gesetzt wird, so wird auch in dem Ausdruck für AB, x negativ zu nehmen seyn, also der Punkt B links der Ordinaten-Axe.

Und um den Punkt C nachher noch rechts derselben Axe denken zu können, so muß man in der Auflösung der Aufgabe, nicht Punkte, die zu einerlei x gehören, sondern den Punkt B zu x, den Punkt C zu x' gehörig nehmen. Dann wird:

$$AB = x.\sqrt{1+a_1^2+2a_1.\cos\varphi},$$

$$AC = x'.\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}$$ und

$$BC = \sqrt{(x-x')^2+(a_1.x-a_2.x')^2+2(x-x').(a_1.x-a_2.x').\cos\varphi},$$

und diese Werthe in

$$\cos\psi = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}$$

statt AB, AC und BC substituirt, geben dann $\cos\psi$ genau so, wie solches kurz vorher gefunden worden ist.

Anmerkung 2. Nimmt man $a_1=0$, so fällt die Linie $y=a_1.x$ mit der Abscissen-Axe zusammen, und ψ geht dann über in den Winkel, welchen die Linie $y=a_2.x$ mit der Abscissen-Axe macht, und wird solcher durch ψ' bezeichnet, so ergibt sich:

$$\cos\psi' = \frac{1+a_2.\cos\varphi}{+\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}},$$

also auch

$$\sin\psi' = \pm\frac{a_2.\sin\varphi}{+\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}},$$

mithin auch

$$tg.\psi' = \pm\frac{a_2.\sin\varphi}{1+a_2.\cos\varphi},$$

wo, weil $\sin\psi'$ immer positiv seyn muß, das (+) Zeichen gilt, wenn a_2 positiv, das (−) Zeichen dagegen, wenn a_2 negativ ist, unter der Voraussetzung nehmlich, daß $\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}$ jedesmal ihren absoluten Werth vorstellt. Dieses Resultat vereinigt sich aber recht gut mit dem (§. 26.) für dieselbe Aufgabe bereits gefundenen, wenn man nur berücksichtigt, daß dort ψ den Winkel bedeutet, welchen die Linie $y=a.x$, in so ferne sie auf der positiven Seite der Abscissen-Axe genommen wird, mit der positiven Richtung derselben Abscissen-Axe bildet; während hier ψ' der Winkel ist, der zwar dieselbe Richtung der Abscissen-Axe zum einen Schenkel hat, dessen anderer Schenkel dagegen

allemal auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe in's Unendliche sich erstrecken soll. So oft nun $\psi > \varphi$ wird (Fig. 16.), so oft ist a nothwendig negativ (weil dann zu einem positiven Werth von x allemal ein negativer Werth von y gehören muß), und ψ' ist dann nothwendig der Nebenwinkel des dortigen ψ (§. 26.), sobald $a = a_2$ gedacht wird; also ist dann auch immer a_2 negativ, und deshalb in der eben gefundenen Formel das (—) Zeichen zu nehmen, so daß man jetzt hat:

$$tg\,\psi' = -\frac{a_2 . sin\,\varphi}{1 + a_2 . cos\,\varphi} = -\frac{a . sin\,\varphi}{1 + a . cos\,\varphi} = -tg . \psi,$$

wie solches in der That für zwei Nebenwinkel statt finden muß.

Ist dagegen $\psi < \varphi$ (Fig. 15.), so ist offenbar a_2 positiv, also nun

$$tg\,\psi' = \frac{a_2 . sin\,\varphi}{1 + a_2 . cos\,\varphi} = \frac{a . sin\,\varphi}{1 + a . cos\,\varphi} = tg\,\psi,$$

d. h. $\psi' = \psi$, wie solches in der That für diesen Fall angenommen worden; unter a und ψ die des (§. 26.) gedacht.

Anmerkung 3. Man kann auch $a_1 = \frac{1}{0}$ nehmen, oder besser $a_1 = \frac{1}{p}$ und zuletzt $p = 0$ setzen. Dann geht die Gleichung:

$$y = a_1 . x \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{p} . x \quad \text{oder in} \quad x = p . y$$

d. h. in $x = 0$ über, so daß diese Linie dann mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt. Wird nun der Winkel, welchen die Linie $y = a_2 . x$ mit dieser, in die Ordinaten-Axe gefallenen $y = a_1 . x$ bildet, durch μ' bezeichnet, so hat man aus der obigen Formel des (§.):

$$cos\,\mu' = \frac{1 + \frac{1}{p} . a_2 + \left(\frac{1}{p} + a_2\right) . cos\,\varphi}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2} + 2 . \frac{1}{p} . cos\,\varphi} . \sqrt{1 + a_2^2 + 2 a_2 . cos\,\varphi}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit p wegmultiplicirt:

$$\cos\mu' = \frac{p + a_2 + (1 + p.a_2).\cos\varphi}{\sqrt{p^2 + 1 + 2p.\cos\varphi}.\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.\cos\varphi}},$$

d. h. weil $p = 0$ gedacht wird,

$$\cos\mu' = \frac{a_2 + \cos\varphi}{+\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.\cos\varphi}}.$$

Daraus:

$$\sin\mu' = \frac{\sin\varphi}{+\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.\cos\varphi}}\ *);$$

also $$tg\,\mu' = \frac{\sin\varphi}{a_2 + \cos\varphi},$$

welches wiederum das Resultat des (§. 26.) ist, dort für denselben Fall und unter denselben Voraussetzungen so gefunden.

Anmerkung 4. Wären beide Geraden, deren Winkel ψ gesucht wird, nicht durch Gleichungen (zwischen den Coordinaten-Werthen eines jeden ihrer einzelnen Punkte) gegeben, sondern durch andere Bedingungen, wie etwa in den Beispielen zu (§. 23.), so würde die Aufgabe aus dem Gebiete der analytischen Geometrie ganz heraustreten und in das der bloßen Trigonometrie (oder wohl gar der bloßen Euklid'schen Geometrie) übergehen, wenn man nicht, wie solches in den eben angeführten Beispielen geschehen ist, die Gleichungen (zwischen den Coordinaten-Werthen) erst ableiten will.

Beispiel 1. In (Fig. 18.) sey gegeben die Linie AM durch den Winkel $MAX = \alpha$ und die Linie AN durch den Winkel $NAX = \beta$, so ist der gesuchte Winkel $\psi = \varphi - \alpha - \beta$.

Beispiel 2. Ist aber AM (Fig. 18.) durch den Winkel $MAX = \alpha$, dagegen AN durch den Winkel $AQC = \gamma$ und noch durch $AQ = a$ und $CQ = b$ gegeben, so ist $\mathfrak{W}.CAQ = \psi + \alpha$ und dabei

---

*) Da nehmlich φ, ψ, ψ', μ, μ' hier immer als hohle (spitze, rechte oder stumpfe) Winkel gedacht sind, so sind ihre Sinus nothwendig positiv.

$$AQ : CQ = \sin ACQ : \sin CAQ,$$

d. h. $$a : b = \sin(\psi+\alpha+\gamma) : \sin(\psi+\alpha),$$

und diese Gleichung dient nun zur Bestimmung des unbekannten Winkels ψ. — Sie gibt

$$a \cdot \sin(\psi+\alpha) = b \cdot \sin(\psi+\alpha+\gamma),$$

oder $$a \cdot \sin\psi \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\psi \cdot \sin\alpha = b \cdot \sin\psi \cdot \cos(\alpha+\gamma) + b \cdot \cos\psi \cdot \sin(\alpha+\gamma),$$

woraus $$\cot g\,\psi = \frac{a \cdot \cos\alpha - b \cdot \cos(\alpha+\gamma)}{b \cdot \sin(\alpha+\gamma) - a \cdot \sin\alpha}$$ hervorgeht.

Wollte man nun dieselbe Aufgabe im analytischen Sinne lösen, so müßte man vor allen Dingen von den Linien AM und AN die Gleichungen sich verschaffen. Und man würde nach (§. 24.) für AM finden die Gleichung:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} \cdot x.$$

In Bezug auf die Linie AN, müßte man dagegen vor allen Dingen die Coordinaten-Werthe eines ihrer Punkte, z. B. AP, CP des Punktes C, aus den gegebenen Bedingungen bestimmen und dann die Gleichung aus (§. 23.) ableiten, in so ferne dieselbe Linie auch noch durch den 2ten Punkt A oder (0,0) durchgehen soll. — Man hat aber

$$AP = AQ - PQ = a - PQ;$$ dagegen

$$PQ : CQ = \sin PCQ : \sin CPQ$$

und $$CP : CQ = \sin CQP : \sin CPQ,$$

dabei noch W. $PCQ = 180° - \varphi - \gamma$ und W. $CPQ = \varphi$; also diese beiden Proportionen:

$$PQ : b = \sin(\varphi+\gamma) : \sin\varphi,$$

$$CP : b = \sin\gamma : \sin\varphi,$$

und $$PQ = \frac{b \cdot \sin(\varphi+\gamma)}{\sin\varphi},$$

$$CP = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\varphi};$$

mithin auch $$AP = a - \frac{b \cdot \sin(\varphi+\gamma)}{\sin\varphi},$$

während CP und AP die Coordinaten-Werthe des Punktes C sind. — Und nun ist die Gleichung für die Linie AN nach (§. 23.):

$$y = \frac{b \cdot \sin\gamma}{a \cdot \sin\varphi - b \cdot \sin(\varphi+\gamma)} \cdot x,$$

unter x und y die Coordinaten-Werthe eines jeden einzelnen ihrer Punkte verstanden.

Damit nun die im (§) gegebenen Linien

$$y = a_1 \cdot x \quad \text{und} \quad y = a_2 \cdot x$$

zugleich die jetzt gegebenen

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}.x \quad \text{und} \quad y = \frac{b.\sin\gamma}{a.\sin\varphi - b.\sin(\varphi+\gamma)}.x$$

repräsentiren; muß man sich unter

a_1 und a_2

jetzt $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ und $\frac{b.\sin\gamma}{a.\sin\varphi - b.\sin(\varphi+\gamma)}$

vorstellen; und dieselben Werthe in der Formel (I.) d. h. in

$$\cos\psi = \frac{1+a_1.a_2+(a_1+a_2).\cos\varphi}{\sqrt{1+a_1^2+2a_1.\cos\varphi}.\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}}$$

statt a_1 und a_2 gedacht, geben dann den Winkel ψ, wie er jetzt gesucht wird, d. h. den Winkel MAN. Oder dieselben Werthe für a_1 und a_2 in der Formel (IV.), d. h. in

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{1+a_1.a_2+(a_1+a_2).\cos\varphi}{\pm(a_1-a_2)\sin\varphi}$$

gedacht, geben dasselbe Resultat, wie es kurz vorher aus rein trigonometrischen Betrachtungen entwickelt worden ist, indem sich, wenn auch erst nach weitläuftiger Rechnung, φ von selber weghebt. *)

---

*) Für den Anfänger, der sich im Calcul mit trigonometrischen Funktionen üben will, setzen wir diesen Calkul hieher: Es ergibt sich nehmlich, unter den gemachten Voraussetzungen, und weil in der zu Grunde gelegten (Figur 18.) $a_2 > a_1$ seyn (in so ferne für einen positiven Werth von x, die (absolute) Ordinate $a_2.x$ größer ist, als die (ebenfalls) absolute Ordinate $a_1.x$) also in der Formel für $\operatorname{cotg}\psi$ das (—) Zeichen genommen werden muß, wenn man für a_1 und a_2 die Werthe subtituirt, und den Bruch sogleich auf seine einfachste Form bringt:

$$\operatorname{cotg}.\psi = \frac{Z}{N},$$

wo $Z = a.[\sin\varphi.\sin(\varphi-\alpha) + \sin\varphi.\sin\alpha.\cos\varphi]$
$\quad - b.[\sin(\varphi-\alpha).\sin(\varphi+\gamma) + \sin\alpha.\sin(\varphi+\gamma).\cos\varphi$
$\quad - \sin\gamma.\sin(\varphi-\alpha).\cos\varphi - \sin\alpha.\sin\gamma]$

und $N = b.[\sin\gamma.\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha.\sin(\varphi+\gamma)].\sin\varphi$
$\quad - a\sin\alpha.\sin^2\varphi$ ist.

Nun ist aber in Z der mit a multiplicirte Faktor, wenn man $\sin\varphi$ herausetzt, und

$\sin(\varphi-\alpha) + \sin\alpha.\cos\varphi$ in $\sin\varphi.\cos\alpha$

verwandelt, $= \sin^2\varphi.\cos\alpha.$

§. 35. Zusatz.

Sind die Coordinaten-Axen auf einander senkrecht, also φ ein rechter Winkel und $\cos\varphi = 0$, so wird der Winkel ψ, welchen zwei gegebene Gerade

$$y = a_1 . x + b \quad \text{und} \quad y_2 = a_2 . x + b'_2,$$

d. h. die Stücke derselben, welche sich auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe in's Unendliche erstrecken, mit einander machen, gegeben durch die Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \cos\psi = \frac{1 + a_1 . a_2}{\sqrt{1 + a_1^2} . \sqrt{1 + a_2^2}},$$

$$\text{II.} \quad \sin\psi = \frac{\pm (a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + a_1^2} . \sqrt{1 + a_2^2}},$$

$$\text{III.} \quad tg\,\psi = \frac{\pm (a_1 - a_2)}{1 + a_1 . a_2},$$

$$\text{IV.} \quad cotg\,\psi = \frac{1 + a_1 . a_2}{\pm (a_1 - a_2)},$$

wo die Wurzeln ihre absoluten (positiven) Werthe vorstellen, und wo das (+) oder das (—) Zeichen vor $a_1 - a_2$ genommen wird, je nachdem $a_1 > a_2$ oder $a_1 < a_2$ ist.

Die beiden ersten Glieder des mit b multiplicirten Faktors in Z, geben auf demselben Wege $\sin\varphi . \cos\alpha . \sin(\varphi + \gamma)$, und die beiden letztern Glieder desselben Faktors lassen sich vereinigen in

$$-\sin\gamma . [\sin\varphi . \cos\varphi . \cos\alpha + \sin\alpha . \sin^2\varphi]$$

und daher der ganze mit b multiplicirte Faktor in Z,

$$\sin\varphi . \cos\alpha . [\sin(\varphi + \gamma) - \sin\gamma . \cos\varphi] - \sin\alpha . \sin\gamma . \sin^2\varphi,$$

oder, wegen $\sin(\varphi + \gamma) - \sin\gamma . \cos\varphi = \sin\varphi . \cos\gamma$,

derselbe Faktor

$$= \sin^2\varphi . [\cos\alpha . \cos\gamma - \sin\alpha . \sin\gamma] = \sin^2\varphi . \cos(\alpha + \gamma),$$

und deshalb $Z = [a . \cos\alpha - b . \cos(\alpha + \gamma)] . \sin^2\varphi$.

Desgleichen verwandelt sich der Faktor von b des Nenners N sogleich in $\sin\varphi . [\sin\gamma . \cos\alpha + \cos\gamma . \sin\alpha]$ d. h. in $\sin\varphi . \sin(\alpha + \gamma)$; folglich ist $N = [b . \sin(\alpha + \gamma) - a . \sin\alpha] . \sin^2\varphi$.

Und wenn man nun $cotg\,\psi = \frac{Z}{N}$ nimmt, so fällt $\sin^2\varphi$ ganz heraus, und man erhält für $cotg\,\psi$ offenbar den obigen Ausdruck wieder.

Note. Dasselbe hätte man direkt aus der Figur ableiten können. Ist nehmlich (Fig. 19.) AM durch $y = a_1 . x$ gegeben, so ist (nach §. 28.) $a_1 = tg\,\gamma$; und ist AN durch $y = a_2 . x$ gegeben, so ist $-a_2 = tg\,\delta$. *) Weil aber $\psi = \gamma + \delta$, so hat man:

$$tg\,\psi = tg\,(\gamma+\delta) = \frac{tg\,\gamma + tg\,\delta}{1 - tg\,\gamma . tg\,\delta} = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 . a_2}$$ **). Ferner ist

$$\cos^2\psi = \frac{1}{1+tg^2\psi} = 1 : 1 + \frac{(a_1-a_2)^2}{(1+a_1.a_2)^2} = 1 : \frac{(1+a_1^2).(1+a_2^2)}{(1+a_1.a_2)^2}$$

$$= \frac{(1+a_1.a_2)^2}{(1+a_1^2).(1+a_2^2)},$$

woraus zuletzt: $\cos\psi = \frac{1+a_1.a_2}{\sqrt{1+a_1^2}.\sqrt{1+a_2^2}}$ folgt.

Oder auch so:

Man setze $AP = x$, so ist $PB = a_1 . x$ und $PC = -a_2 . x$, also $BC = (a_1 - a_2) . x$

und $AB = \sqrt{AP^2 + PB^2} = \sqrt{x^2 + a_1^2 . x^2} = x . \sqrt{1+a_1^2}$;

so wie $AC = \sqrt{AP^2 + PC^2} = x . \sqrt{1+a_2^2}$; zuletzt

aber $\cos\psi = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC . AB} = \frac{1+a_1.a_2}{\sqrt{1+a_1^2}.\sqrt{1+a_2^2}}$.

Allen diesen Wegen scheint aber der obige des Textes, seiner Allgemeinheit und auch der Bestimmtheit seiner Resultate wegen, vorzuziehen zu seyn.

§. 36. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Gerade durch die Gleichung: $y = a_1 . x + b$. Man soll eine zweite gerade Linie finden, welche durch den Punkt (α, β) hindurchgeht, und mit der erstern einen gegebenen Winkel ψ bildet.

Auflösung. Wird die Gleichung für die gesuchte Linie durch

$y - \beta = a_2 . (x - \alpha)$ oder $y = a_2 . x + (\beta - a_2 . \alpha)$

vorgestellt, so geht letztere bereits durch den Punkt (α, β), und es ist daher nur noch a_2 so zu bestimmen, daß die Linien

---

*) Nehmlich $a_2 = tg\,NAX$ nach (§. 27.).

**) Nach der (Figur 19.) ist jetzt $a_1 > a_2$, weil a_1 positiv, a_2 aber negativ ist.

$y = a_1 . x$ und $y = a_2 . x$ den gegebenen Winkel ψ mit einander bilden. Es muß also a_2 so seyn, daß der Gleichung des (§. 34.):

$$1) \quad \cos\psi = \frac{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi}{\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi} . \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}}$$

genügt werde; und deshalb erhält man den gesuchten Werth von a_2, wenn man diese Gleichung (1.) nach a_2 auflöst.

Um dies bequemer thun zu können, bezeichne man die $\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi}$ durch α_1, so daß α_1 eine gegebene und absolute Zahl vorstellt; und man erhält aus (1.), mit $\alpha_1 . \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$ weg multiplicirend, und quadrirend:

$$2) \quad \cos^2\psi . \alpha_1^2 . (1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi) =$$
$$= [1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi]^2 =$$
$$= 1 + a_1^2 . a_2^2 + (a_1^2 + 2a_1 . a_2 + a_2^2) . \cos^2\varphi$$
$$+ 2a_1 . a_2 + 2(a_1 + a_2) . \cos\varphi$$
$$+ 2a_1 . a_2 (a_1 + a_2) . \cos\varphi .$$

Diese Gleichung vollends nach a_2 geordnet, geht über in

$$3) \quad [\alpha_1^2 . \cos^2\psi - a_1^2 - \cos^2\varphi - 2a_1 . \cos\varphi] . a_2^2$$
$$+ 2[\alpha_1^2 . \cos^2\psi . \cos\varphi - a_1 . \cos^2\varphi - a_1 - \cos\varphi - a_1^2 . \cos\varphi] . a_2$$
$$+ [\alpha_1^2 . \cos^2\psi - 1 - a_1^2 . \cos^2\varphi - 2a_1 . \cos\varphi] = 0.$$

Oder wenn man statt α_1^2 seinen Werth $a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi + 1$. setzt:

$$4) \quad [a_1^2 . (\cos^2\psi - 1) + 2a_1 . (\cos^2\psi - 1) \cos\varphi +$$
$$+ (\cos^2\psi - \cos^2\varphi)] . a_2^2$$
$$+ 2[a_1^2 . (\cos^2\psi - 1) . \cos\varphi + 2a_1 . (\cos^2\psi - 1) . \cos^2\varphi - a_1 +$$
$$+ (\cos^2\psi - 1) . \cos\varphi] . a_2$$
$$+ [a_1^2 . (\cos^2\psi - \cos^2\varphi) + 2a_1 . (\cos^2\psi - 1) . \cos\varphi +$$
$$+ (\cos^2\psi - 1)] = 0.$$

Wenn man aber hier alle (+ oder —) Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt, und folgende Relationen:

$$1-\cos^2\psi=\sin^2\psi$$ und

$$\cos^2\varphi-\cos^2\psi=\sin^2\psi-\sin^2\varphi=\sin(\psi+\varphi).\sin(\psi-\varphi)$$

anwendet, so erhält man:

$$5)\ [a_1^2.\sin^2\psi+2a_1.\sin^2\psi.\cos\varphi+\sin(\psi+\varphi).\sin(\psi-\varphi)].a_2^2$$
$$+2[a_1^2.\sin^2\psi.\cos\varphi+a_1.(1-2\sin^2\psi.\cos^2\varphi)+$$
$$+\sin^2\psi.\cos\varphi].a_2$$
$$+[a_1^2.\sin(\psi+\varphi).\sin(\psi-\varphi)+2a_1.\sin^2\psi.\cos\varphi+\sin^2\psi]=0.$$

Und weil hier der Coefficient von a_2^2 sich auch so schreiben läßt:

$$[a_1.\sin\psi+\sin(\psi+\varphi)].[a_1.\sin\psi+\sin(\psi-\varphi)]$$

und da auch das dritte Glied der Gleichung (5.) in die beiden Faktoren

$$[a_1.\sin(\psi+\varphi)+\sin\psi].[a_1.\sin(\psi-\varphi)+\sin\psi]$$

zerlegt werden kann, so gelangt man bald dahin, die ganze nach a_2 quadratische Gleichung (5.) in zwei nach a_2 einfache Faktoren zu zerlegen, nehmlich in

$$6)\ ([a_1.\sin\psi+\sin(\psi+\varphi)].a_2+[a_1.\sin(\psi-\varphi)+\sin\psi])\times$$
$$([a_1.\sin\psi+\sin(\psi-\varphi)].a_2+[a_1.\sin(\psi+\varphi)+\sin\psi])=0,$$

so daß sich nun, weil jeder Faktor für sich 0 werden kann, für a_2 zwei Werthe ergeben, nehmlich:

$$7)\quad a_2=-\frac{a_1.\sin(\psi+\varphi)+\sin\psi}{a_1.\sin\psi+\sin(\psi-\varphi)},$$

und

$$8)\quad a_2=-\frac{a_1.\sin(\psi-\varphi)+\sin\psi}{a_1.\sin\psi+\sin(\psi+\varphi)},$$

welche beide Werthe sich in die einzige Formel:

$$9)\quad a_2=-\frac{a_1.\sin(\psi\mp\varphi)+\sin\psi}{a_1.\sin\psi+\sin(\psi\mp\varphi)}$$

zusammenfassen lassen, wenn man nur jedesmal die obern (+ oder —) Zeichen zugleich oder die untern zugleich nimmt.

Es ist also nun:

$$y-\beta=a_2.(x-\alpha)$$

die Gleichung für die durch den Punkt (α, β) hindurchgehende

gerade Linie, welche mit der gegebenen Linie $y = a_1 . x + b_1$ den gegebenen Winkel ψ bildet, sobald nur statt a_2 einer der Werthe gesetzt wird.

Und weil sich zwei reelle Werthe für a_2 ergeben haben, die der Bedingung genügen, daß die neue gesuchte Linie mit der gegebenen den gegebenen Winkel ψ macht, so folgt, daß es in der That zwei solche Linien gibt, wie solches auch schon aus der Euklidischen Geometrie in die Augen fällt, in so ferne diese beiden neuen Linien mit der gegebenen $y = a_1 . x + b$ ein gleichschenkliches Dreieck, also auch mit ihr gleiche Winkel bilden können.

Anmerkung 1. Man konnte dieselbe Aufgabe noch bequemer lösen, wenn man a_2 aus der Gleichung (III. oder IV.) des (§. 34.) bestimmte. — Da nehmlich die gesuchte Linie $y = a_2 . x$ mit der gegebenen Linie $y = a_1 . x$ einen gegebenen Winkel ψ bilden soll, so schneiden sich beide Linien, und es ist also a_2 von a_1 verschieden und man kann daher und muß, wegen des doppelten ($\pm$) Zeichens in (§. 34. III. oder IV.), die Aufgabe in zweie zerfällen, nehmlich:

1) a_2 so zu finden, daß $a_2 < a_1$ ist, und dabei noch der Haupt-Aufgabe selbst genügt;

2) a_2 so zu finden, daß $a_2 > a_1$ ist, und dabei der Haupt-Aufgabe genügt wird.

Im Falle der Aufgabe (1.) hat man aus (§. 34. III.) die Gleichung:

$$tg\,\psi = \frac{\pm (a_1 - a_2) . sin\,\varphi}{1 \pm a_1 . a_2 \pm (a_1 + a_2) . cos\,\varphi},$$

und daraus ergibt sich sogleich:

$$\text{I.}\quad a_2 = \frac{a_1 . sin\,\varphi - (1 \pm a_1 . cos\,\varphi) . tg\,\psi}{sin\,\varphi \pm (a_1 \pm cos\,\varphi) . tg\,\psi}.$$

Im Falle der Aufgabe (2.) hat man dagegen aus (§. 34. III.):

$$tg\,\psi = \frac{-(a_1 - a_2) . sin\,\varphi}{1 \pm a_1 . a_2 + (a_1 \pm a_2) . cos\,\varphi},$$

und erhält daraus:

$$\text{II.}\quad a_2 = \frac{-a_1 . \sin\varphi - (1 + a_1 . \cos\varphi) . tg\,\psi}{-\sin\varphi + (a_1 + \cos\varphi) . tg\,\psi} \text{ *).}$$

Der Winkel ψ ist aber hier immer derjenige, dessen beide Schenkel auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe in's Unendliche sich erstrecken. Im (§.) selbst konnte dagegen ψ auch der Nebenwinkel seyn, sobald man nur α_1 (ja auch

$$\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi})$$

als eine negative Zahl betrachtete (nach §. 34. Anmerkung 1.); denn dann bleibt alles unverändert, und auch das Endresultat (n. 9.) bleibt unverändert. Es wird daher die Auflösung des (§.) in (n. 9.) allemal wirklich zwei Linien geben, so daß der auf derselben Seite der gegebenen Linie $y = a_1 . x$ liegende Schenkel der gesuchten Linie, bald mit der einen Richtung von $y = a_1 . x$, bald aber auch mit der andern entgegengesetzten Richtung derselben, den gegebenen Winkel ψ bildet. In den Auflösungen der gegenwärtigen Anmerkung dagegen, müßte man immer noch nachsehen, ob das in (I.) gefundene a_2 wirklich kleiner ist als a_1, und ob der in (II.) gefundene Werth von a_2 immer größer als a_1 ist, so daß, je nachdem man im speciellen jede dieser eben berührten Bedingungen erfüllt sieht, oder nur eine einzige derselben, oder gar keine, zuweilen wirklich zwei Linien, zuweilen aber auch nur eine einzige, und manchmal gar keine Linie gefunden wird, welche mit der gegebenen Linie $y = a_1 . x$, den gegebenen Winkel ψ bilden könnte, so aber, daß beide Schenkel desselben auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe liegen **).

---

*) Es wird für den Anfänger eine Uebung seyn, wenn er versucht, die eben für a_2 erhaltenen Resultate dergestalt zu verwandeln, daß die (n. 9.) des (§.) selbst wiederum hervorgeht.

**) Der erste Fall würde eintreten (Fig. 18.), wenn AM die gegebene Linie und $\psi < \text{W.MAY}$ und auch zugleich $\psi < \text{MAY}'$ wäre. Der

Wollte man daher bei der Auflösung dieser Anmerkung, wirklich alle Auflösungen der Aufgabe erhalten, so müßte man in den Resultaten (I. und II.) statt ψ sowohl den gegebenen Winkel, als auch seinen Nebenwinkel setzen (so daß es also dann einerlei ist, ob die auf der positiven Seite der Ordinaten-Axe liegenden Schenkel, den Winkel ψ selbst oder seinen Nebenwinkel bilden), d. h. $tg\,\psi$ bald positiv, bald negativ nehmen; und dann würde man von den beiden Werthen, welche aus (I.) für a_2 hervorgehen, (diese beiden Werthe sind aber keine andern als (I. und II.) in Verbindung, weil eben dadurch, daß man $tg\,\psi$ negativ nimmt, die Formel (I.) in (II.) und die Formel (II.) in (I.) übergeht), bloß denjenigen nehmen, der in der That $< a_1$ ist, (folglich alle beide, wenn sie alle beide kleiner als a_1 seyn sollten) so wie man von den aus (II.) dann hervorgehenden beiden Werthen von a_2, wiederum nur denjenigen nehmen würde, welcher in der That $> a_1$ ist. Auf diese Weise verfahrend, würde man aber dieselbe vollständige Auflösung der Aufgabe erhalten, wie sie im (§.) selbst erhalten worden ist.

Anmerkung 2. Es ist also nach dieser letztern Auflösung:

$$a_2 = \frac{a_1 . sin\,\varphi - (1 + a_1 . cos\,\varphi) . tg\,\psi}{sin\,\varphi + (a_1 + cos\,\varphi) . tg\,\psi},$$

und diese Formel gibt alle beiden Linien, wenn man für ψ bald den gegebenen bald seinen Nebenwinkel setzt, d. h. wenn man $tg\,\psi$ bald positiv bald negativ nimmt.

Wollte man nun die zweite Linie so finden, daß sie auf der erstern senkrecht steht, so müßte man $\psi = 90°$ setzen, und hätte dann $tg\,\psi = \frac{1}{0} = \infty$. Man müßte daher zuerst

---

andere Fall dagegen, wenn $\psi <$ W. MAY und zugleich $\psi >$ MAY′ oder auch wenn $\psi >$ MAY und zugleich $\psi <$ MAY′ seyn sollte. Der dritte Fall endlich würde statt finden, wenn $\psi >$ MAY und zugleich auch $\psi >$ MAY′ gegeben wäre.

$tg\,\psi = \frac{1}{p}$ setzen, die Nenner p durch Multiplikation wegschaffen und zuletzt $p = 0$ nehmen, um für diesen Fall das wahre Resultat zu erhalten (Vergl. Anmerk. 3. zu §. 34.). Man kann aber die obige Formel selbst dadurch umändern, daß man $\frac{sin\,\psi}{cos\,\psi}$ statt $tg\,\psi$ setzt, und Zähler und Nenner mit $cos\,\psi$ weg multiplicirt. Man hat dann:

$$a_2 = \frac{a_1 . sin\,\varphi . cos\,\psi - (1 + a_1 . cos\,\varphi) . sin\,\psi}{sin\,\varphi . cos\,\psi + (a_1 + cos\,\varphi) . sin\,\psi},$$

wo man ($cos\,\psi$ oder $sin\,\psi$) bald positiv bald negativ nehmen muß, um beide Werthe zu haben. Für $\psi = 90°$, wird aber $cos\,\psi = 0$, $sin\,\psi = 1$, mithin:

$$a_2 = -\frac{1 + a_1 . cos\,\varphi}{a_1 + cos\,\varphi}.$$

Dasselbe gibt nun aber der nächste

§. 37. Zusatz.

Wird die zweite Linie $y - \beta = a_2 . (x - \alpha)$ so verlangt, daß sie auf der erstern $y = a_1 . x + b_1$ senkrecht steht, also so daß der gegebene Winkel ψ ein rechter wird, so reduciren sich, weil dann $sin\,\psi = 1$ und $sin\,(\psi \pm \varphi) = cos\,\varphi$ wird, beide Werthe von a_2 (§. 36. n. 9.) auf den einzigen

$$a_2 = -\frac{1 + a_1 . cos\,\varphi}{a_1 + cos\,\varphi}.$$

Auch weiß man aus der Euklid'schen Geometrie, daß in der That von einem Punkte (α, β) aus, auf eine gegebene Linie $y = a_1 . x + b_1$ nur eine einzige senkrechte Linie möglich ist.

Anmerkung. Dieses Resultat kann man leichter direkt haben, indem man in der noch unaufgelösten Gleichung (§. 36. n. 1.) $cos\,\psi = 0$ setzt, wo dann sogleich:

$$1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . cos\,\varphi = 0$$

folgt, für den Fall, daß die Linien senkrecht auf einander stehen.

Letztere Gleichung gibt aber sogleich:

$$a_2 = -\frac{1 + a_1 . \cos\varphi}{a_1 + \cos\varphi}.$$

§. 38. Zusatz.

Werden die Coordinaten-Axen auf einander senkrecht angenommen, so findet sich, weil dann $\cos\varphi = 0$ wird, aus der Auflösung des (§. 36.), für die gesuchte Linie:

$$y - \beta = a_2 . (x - \alpha),$$

welche mit der gegebenen Linie

$$y = a_1 . x + b_1$$

den gegebenen Winkel ψ bildet:

$$a_2 = -\frac{a_1 . \sin(\psi \mp 90°) + \sin\psi}{a_1 . \sin\psi + \sin(\psi \mp 90°)},$$

oder $$a_2 = \frac{\mp a_1 . \cos\psi - \sin\psi}{a_1 . \sin\psi \mp \cos\psi},$$

d. h. $$a_2 = \frac{\mp a_1 - tg . \psi}{a_1 . tg\,\psi \mp 1},$$

oder auch $$a_2 = \frac{\mp a_1 . cotg\,\psi - 1}{a_1 \mp cotg\,\psi}.$$

Und für die auf $y = a_1 . x + b_1$ senkrechte Linie $y - \beta = a_2 . (x - \alpha)$ findet sich jetzt, wo rechtwinkliche Coordinaten-Axen angenommen sind, weil nun auch

$$\cos\psi = 0, \quad (tg\,\psi = \frac{1}{0}, \quad cotg\,\psi = 0)$$

genommen werden muß,

$$a_2 = -\frac{1}{a_1},$$

in so ferne auch jetzt beide Werthe von a_2 in einen einzigen zusammenfallen.

Anmerkung. Das letztere Resultat konnte man auch aus (§. 37.) erhalten, wo die Gleichung für die auf $y = a_1 . x + b_1$

senkrechte Linie bereits gefunden worden ist, für Axen, die einen beliebigen Winkel φ mit einander machen, in so ferne jetzt nur $\varphi = 90^\circ$ also $\cos\varphi = 0$ genommen werden muß.

Note. Dasselbe letztere Resultat kann man aber auch am bequemsten direkt aus der Figur ableiten. Seyen nehmlich (Fig. 19) die Axen X′AX nud Y′AY senkrecht aufeinander und M′AM die durch $y_1 = a_1 . x$ gegebene Linie, so wie N′AN die auf ihr senkrechte, deren Gleichung durch $y = a_2 . x$ vorgestellt wird, so daß a_2 noch gefunden werden muß. Zieht man nun BC senkrecht auf AX, und setzt $AP = x$, so ist BP das y der ersten Gleichung ($y = a_1 . x$), also $BP = a_1 . x$, und $-CP$ ist das y der andern Gleichung. Und in dem rechtwinklichen Dreieck CAB, wo AP senkrecht auf BC steht, hat man nun:

$$CP : AP = AP : BP$$

oder

$$-y : x = x : a_1 . x$$

also

$$y = -\frac{x^2}{a_1 . x} = -\frac{1}{a_1} . x,$$

wo x und y die Coordinaten-Werthe des beliebigen Punktes C der auf AM senkrechten Linie AN vorstellen. — Und jede mit dieser Geraden $y = -\frac{1}{a_1} . x$ parallele Linie, also auch die durch die Gleichung: $y - \beta = -\frac{1}{a_1} . (x - \alpha)$ gegebene, steht nun ebenfalls auf der Linie $y = a_1 . x$ senkrecht, also auch senkrecht auf der mit letzterer parallelen Linie $y = a_1 . x + b_1$.

§. 39. Zusatz.

Wenn $y = a_1 . x + b_1$ und $y = a_2 . x + b_2$ die Gleichungen sind, welche auf Coordinaten-Axen bezogen, die sich unter dem Winkel φ schneiden, zwei gerade unter dem Winkel ψ sich schneidende Linien liefern, so findet nach (§. 34.) die Gleichung statt:

$$\cos\psi = \frac{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi}{\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}}.$$

In dieser Gleichung kommen vor die Buchstaben ψ, φ, a_1 und a_2, nicht aber b_1 und b_2 *). So oft daher von diesen

*) Letzterer Umstand würde uns zeigen, daß der Winkel ψ immer derselbe bleibt, welche Werthe man auch statt b_1 und b_2 in die Gleichun-

4 Buchstaben ψ, φ, a_1 und a_2, drei gegeben sind, so oft kann der 4te aus dieser Gleichung gefunden werden.

Nun haben wir im (§. 34.) a_1 und a_2, d. h. die beiden geraden Linien, als gegeben angesehen, und noch den Coordinaten-Axen-Winkel φ; und den Winkel ψ gesucht, unter dem die beiden gegebenen Geraden sich schneiden. Im (§. 36.) dagegen haben wir a_1 und ψ als gegeben angesehen und a_2 gesucht, während der Coordinaten-Axen-Winkel φ ebenfalls als gegeben angesehen worden. — Man könnte nun aber auch a_1, a_2 und ψ geben, und nun den Winkel φ suchen. Dies würde zu folgender Aufgabe führen:

Welchen Winkel φ müssen die Coordinaten-Axen in ihrer ersten Region mit einander machen, damit die darauf bezogenen Gleichungen $y = a_1 . x + b_1$ und $y = a_2 . x + b_2$ solche gerade Linien geben, die einen gegebenen Winkel ψ mit einander machen?

Um diese Aufgabe zu lösen, hat man nichts weiter zu thun als die vorstehende Gleichung zwischen ψ, a_1, a_2 und φ nach *cos* φ aufzulösen. Die Gleichung wird aber nach *cos* φ geordnet eine quadratische und gibt daher für *cos* φ zwei Werthe.

Anmerkung. Will man letztere Aufgabe bloß für den einfachern Fall lösen, daß die Linien senkrecht auf einander stehen

---

gen der Geraden, nehmlich in $y = a_1 . x + b_1$ und $y = a_2 . x + b_2$, setzen möchte. Nun liefert aber $y = a_1 . x + b_1$, wenn man nach und nach statt b_1 immer andre nnd andre Werthe setzt, lauter mit einander parallele Linien. Dasselbe gilt von $y = a_2 . x + b_2$. Folglich bleibt der Winkel ψ derselbe, wenn statt der ursprünglich gedachten Linien, andere mit diesen beziehlich parallele genommen werden. — Wäre demnach dieser Satz uns nicht schon aus der Euklid'schen Geometrie bekannt, so würde solcher jetzt auf rein calculativem (analytischem) Wege folgern.

Dabei mag bemerkt werden, daß wir bei der Behandlung des (§. 34.) den Euklid'schen Satz zwar angewandt haben, aber genau dasselbe Resultat durch dieselben Schlüsse erhalten haben würden, wenn wir solchen auch nicht benützt hätten. Daß wir ihn benützten, vereinfachte bloß die Rechnungen.

sollen, daß also $\psi = 90°$ und $\cos\psi = 0$ ist, so reducirt sich die Gleichung zur Bestimmung von $\cos\varphi$ auf:

$$1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi = 0,$$

woraus

$$\cos\varphi = -\frac{1 + a_1 . a_2}{a_1 + a_2}$$

folgert.

Und weil $\cos\varphi$ absolut genommen, höchstens $= 1$ werden kann, und außerdem immer kleiner als 1 seyn muß, so ist eine Auflösung dieser Aufgabe nicht möglich, wenn nicht

$1 + a_1 . a_2 \lessgtr a_1 + a_2$ seyn sollte; beide Ausdrücke absolut genommen gedacht *). (E. 13. 14.).

Beispiele über die letzteren Aufgaben.

Beispiel 1. Die Linie DM ist gegeben (Fig. 20.) durch die Linie $AB = a$ und $\mathfrak{W}.XBM = \alpha$. Man soll die Gleichung für die Linie DN finden, welche durch den, mittelst der Coordinaten $AG = c$ und $DG = d$ gegebenen Punkt D hindurchgeht, und mit der DM den gegebenen Winkel $MDN = \psi$ bildet.

Man suche vor allen Dingen die Gleichung für die gegebene Linie DM nach (§. 23.) oder nach (§. 24.). Es ist nehmlich nach (§. 24.) die Gleichung für eine mit der DM parallele, aber durch den Anfangspunkt A hindurchgehende Gerade

$$1) \quad y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} . x;$$

und daher die Gleichung für die Linie DM selbst, welche noch durch den Punkt B hindurchgehen soll (dessen Coordinaten-Werthe $-a$ und 0 sind);

$$2) \quad y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} . (x + a)$$ **)

---

*) Es könnte nehmlich $1 + a_1 . a_2$ oder auch $a_1 + a_2$ eine negative Zahl seyn. Ob aber $\cos\varphi$ positiv oder negativ ist, darauf kommt es hier nicht an, sondern nur darauf, ob der für $\cos\varphi$ gefundene (positive oder negative) Bruch, absolut gedacht, kleiner als 1 ist.

**) Da parallele Linien allenthalben gleiche Winkel mit einander machen, so war die Gerade (n. 1.) für unsern gegenwärtigen Zweck eben so brauchbar als die (n. 2.), daher letztere Gleichung hier ganz überflüssig.

Soll daher der Satz (§. 36.) in Anwendung gebracht werden, so muß man für den gegenwärtigen Fall:

$$3) \quad a_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}$$

nehmen. Nach (§. 36. n. 9.) ist dann:

$$4) \quad a_2 = - \frac{a_1 . \sin (\psi \pm \varphi) + \sin \psi}{a_1 . \sin \psi + \sin (\psi \mp \varphi)},$$

wo a_1 den Werth aus (3.) bedeutet, und wo dann:

$$5) \quad y = a_2 . x$$

die Gleichung für die Linie ist, welche mit DN parallel läuft, d. h. mit der Geraden DM den Winkel ψ bildet, aber durch den Anfangs-Punkt A hindurchgeht. Hat man den Werth für a_1 aus (3) in (4.) substituirt und sonach a_2 in die gegebenen Stücke ausgedrückt, so ist die Gleichung der Linie DN selbst, welche mit der Geraden (5.) parallel läuft und noch durch den Punkt $(-c, -d)$ hindurch geht, nach (§. 33.):

$$6) \quad y + d = a_2 . (x + c);$$

und weil a_2 zwei Werthe hat, so stellt diese Gleichung sogleich die beiden Linien DN und DN′ vor, welche beide mit DM den Winkel ψ bilden; und zwar gibt nach dieser Figur, derjenige Werth von a_2, welcher $> a_1$ ist, die Linie DN; der andere dagegen, welcher $< a_1$, gibt die Linie DN′.

In den meisten Fällen jedoch, wo eine Linie DM, wie hier, nicht durch eine Gleichung (zwischen ihren Coordinaten-Werthen), sondern trigonometrisch (durch Winkel und Punkte) oder rein geometrisch (durch bloße Punkte) gegeben ist, wird es immer bequemer seyn, den (§. 36.) selbst nicht anzuwenden, sondern die Gleichung für die Linie DN in jedem solchen speziellen Falle direkt zu finden.

Es bildet nehmlich die Linie DN mit der Abscissen-Axe X′AX den Winkel $\psi + \alpha$ und es ist daher ihre Gleichung nach (§. 25.) und (§. 33.):

$$7) \quad y + d = \frac{\sin (\psi + \alpha)}{\sin (\varphi - \psi - \alpha)} . (x + c),$$

welches Resultat mit einem der beiden in (6.) erhaltenen übereinstimmen muß, und zwar mit demjenigen, wo $a_2 > a_1$ ist.

Was dagegen die Linie DN′ betrifft, so bildet sie mit der Abscissen-Axe X′AX den Winkel $\alpha - \psi$, und ihre Gleichung ist daher:

$$8) \quad y + d = \frac{\sin (\alpha - \psi)}{\sin (\varphi - \alpha + \psi)} . (x + c);$$

und da diese Gleichung (8.) von der vorigen (7.) nur dadurch verschieden ist, daß, wo dort ψ, hier überall $-\psi$ steht, so kann man beide wieder zusammenfassen in

$$9) \quad y+d=\frac{sin\,(\alpha\mp\psi)}{sin\,(\varphi-\alpha\pm\psi)}.(x+c).$$

Note. Wenn übrigens Anfänger die Bemerkung machen, daß spezielle Aufgaben, wie die gegenwärtige, häufig direkt aus der Figur leichter behandelt werden, als wenn man die allgemeine Auflösung anwendet, so müssen sie sich nicht dadurch zu der Meinung verleiten lassen, als wären die allgemeinen Untersuchungen überflüssig. Im Gegentheil ist nur das allgemeine Verfahren das überall anwendbare, und die wesentlichste Stärke des Calculs besteht gerade darin, allgemeine Untersuchungen anstellen und durchführen zu können, welche in der That mit Nothwendigkeit für alle speciellen Fälle gelten müssen, wie sie später nur immer vorkommen mögen.

Beispiel 2. Dieselbe Aufgabe wie im (1sten Beispiel), nur mit der Abänderung, daß jetzt senkrechte Axen vorausgesetzt werden.

Unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung für die Linie DM (Fig. 20.)

$$y=tg\,\alpha.(x+a).$$

Also in der Auflösung des (§. 36. — 38.):

$$a_1=tg\,.\,\alpha \qquad \text{und (§. 38.)}$$

$$a_2=\frac{\mp a_1\,.\,cos\,\psi-sin\,\psi}{a_1\,.\,sin\,\psi\mp cos\,\psi}=\frac{\mp\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\psi-cos\,\alpha\,.\,sin\,\psi}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\psi\mp cos\,\alpha\,.\,cos\,\psi}$$

$$=-\frac{sin\,\psi\,.\,cos\,\alpha\pm cos\,\psi\,sin\,\alpha}{\mp cos\,\alpha\,.\,cos\,\psi+sin\,\alpha\,.\,sin\,\psi}=-\frac{sin\,(\psi\pm\alpha)}{\mp cos\,(\psi\pm\alpha)}=\pm tg\,(\psi\pm\alpha),$$

wo jedesmal die obern oder jedesmal die untern Zeichen zugleich gelten. Läßt man die obern gelten, so ergibt sich:

$$a_2=tg\,(\psi+\alpha)=tg\,(\alpha+\psi)$$

und läßt man die untern gelten, so hat man:

$$a_2=-\,tg\,(\psi-\alpha)=tg\,(\alpha-\psi);$$

und daher die Gleichung für die gesuchten Linien DN oder DN′:

$$y+d=tg\,(\alpha\pm\psi).(x+c).$$

Dasselbe hätte man direkt aus der Figur erhalten, wenn man bemerkt hätte, daß diese Linien DN und DN′ mit der Abscissen-Axe X′AX die Winkel $(\alpha+\psi)$ und $(\alpha-\psi)$ bilden, und dann (§. 24.) und (§. 33.) für rechtwinkliche Axen hätte anwenden wollen.

Oder noch direkter: Man hat, wenn man DX_1 parallel mit AX zieht, und HQP parallel mit der Ordinaten-Axe, d. h. jetzt, senkrecht auf AX oder auf DX_1,

$$\frac{HP}{DP} = tg.(\alpha+\psi);$$

aber $$HP = HQ + DG = y + d,$$

und $$DP = AQ + AG = x + c,$$

also $$\frac{y+d}{x+c} = tg(\alpha+\psi),$$

oder $$y + d = tg(\alpha+\psi).(x+c).$$

Aehnliches für die Linie DN'.

Beispiel 3. Es ist die Linie DM wie im (1ten Beispiel) gegeben; φ der Coordinaten-Axen-Winkel in der ersten Region; man soll die Gleichung der in D auf DM senkrechten Linie DO finden.

Die Gleichung für die Linie DM ist:

$$y = \frac{sin\,\alpha}{sin(\varphi-\alpha)}.(x+a).$$

Die Gleichug der auf ihr senkrechten Linie ist nach (§. 37.):

$$y + d = a_2.(x+c),$$

wenn $$a_1 = \frac{sin\,\alpha}{sin(\varphi-\alpha)}$$

und a_2 so gedacht ist, daß

$$1 + a_1.a_2 + (a_1 + a_2).cos\,\varphi = 0$$

wird, also daß

$$a^2 = -\frac{1 + a_1.cos\,\varphi}{a_1 + cos\,\varphi} =$$

$$= -\frac{1 + \frac{sin\,\alpha}{sin(\varphi-\alpha)}.cos\,\varphi}{\frac{sin\,\alpha}{sin(\varphi-\alpha)} + cos\,\varphi} =$$

$$= -\frac{sin(\varphi-\alpha) + sin\,\alpha.cos\,\varphi}{sin\,\alpha + sin(\varphi-\alpha).cos\,\varphi}$$

$$= -\frac{\sin\varphi \,.\, \cos\alpha}{\sin\varphi \,.\, \cos(\varphi-\alpha)} \quad *)$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)} = -\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)}.$$

Also ist die Gleichung für die gesuchte auf DM senkrechte Linie DO jetzt:

$$y+d = -\frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}\,.\,(x+c).$$

Beispiel 4. Es ist DM wie im (1ten Beispiel) gegeben; man soll die Gleichung für die auf ihr senkrechte DO finden, unter der Voraussetzung, daß die Coordinaten-Axen rechtwinklich sind, und daß $-c$ und $-d$ die Coordinaten-Werthe des Punktes D sind.

Man hat hier die Gleichung für die Linie DM:

$$y = tg\,\alpha\,.\,(x+a)$$

und die Gleichung für die senkrechte Linie DO nach (§. 33.) und (§. 38.):

$$y+d = a_2\,.\,(x+c), \quad \text{wenn} \quad a_1 = tg\,\alpha,$$

und $1+a_1\,.\,a_2 = 0$ d. h. $a_2 = -\frac{1}{a_1}$,

oder $a_2 = -\frac{1}{tg\,\alpha} = -\,cotg\,\alpha$ ist.

Also die Gleichung für die gesuchte Linie DO:

$$y+d = -\,cotg\,\alpha\,.\,(x+c).$$

Beispiel 5. Wird alles Gegebene wie im (Beispiel 4.) gelassen; aber die Gleichung für die Linie LH verlangt, welche von dem Punkte H aus, dessen Abscisse $AQ = p$, dessen Ordinate $QH = q$, gegeben ist, senkrecht auf die gegebene DM gefällt worden ist, so wird sie (die gesuchte Gleichung) offenbar:

$$y-q = -\,cotg\,\alpha\,.\,(x-p).$$

Beispiel 6. Es ist die gerade Linie DM durch die beiden Entfernungen $AB = a$ und $AC = b$ gegeben, und von dem Punkte D der Abscissen-Werth $AG = c$. Man soll die Punkte E und F finden, in welchen die durch den Punkt D hindurchgehende mit der DM den Winkel ψ bildende Linie DN, die Axen schneidet.

---

*) Weil $\sin(\varphi-\alpha) = \sin\varphi\,.\,\cos\alpha - \cos\varphi\,.\,\sin\alpha$;

also $\sin(\varphi-\alpha) + \cos\varphi\,.\,\sin\alpha = \sin\varphi\,.\,\cos\alpha$, und auch

$\sin\alpha + \sin(\varphi-\alpha)\,.\,\cos\varphi = \sin\alpha\,(1-\cos^2\varphi) + \sin\varphi\,.\,\cos\varphi\,.\,\cos\alpha$

$= \sin\varphi\,(\sin\alpha\,.\,\sin\varphi + \cos\alpha\,.\,\cos\varphi) = \sin\varphi\,.\,\cos(\varphi-\alpha)$ ist.

Da hier von dem Punkte B, die Coordinaten-Werthe $(-a, 0)$, und von dem Punkte C die Coordinaten-Werthe $(0, b)$ bekannt sind, so ist die Gleichung für diese Linie DM

$$1) \quad y = -\frac{b}{a}.(x+a).$$

Da nun von dem Punkte D der Abscissen-Werth $-c$ bekannt ist, selbiger aber in der Linie DM liegt, so kann sein Ordinaten-Werth aus der Gleichung (1.) dazu gefunden werden. *) Es ist nehmlich solcher

$$= -\frac{b}{a}.(-c+a)$$

und mag durch δ bezeichnet werden, wo dasmal δ eine negative Zahl seyn wird, weil der Punkt D auf der negativen Seite der Abscissen-Axe liegt, so daß dann $-\delta$ die absolute Zahl vorstellen wird, welche das Maaß der Linie DG angibt; nehmlich $DG = -\delta$.

Die Gleichung für die gesuchte Linie DN ist nun nach (§. 36.):

$$2) \quad y - \delta = a_2.(x+c),$$

wenn

$$a_1 = -\frac{b}{a}$$

und

$$a_2 = -\frac{a_1.\sin(\psi \mp \varphi) + \sin\psi}{a_1.\sin\psi + \sin(\psi \mp \varphi)},$$

oder im Falle $\varphi = 90^\circ$ genommen wird,

$$a_2 = \frac{\mp a_1.\cos\psi - \sin\psi}{a_1.\sin\psi.\mp\cos\psi},$$

oder, wenn der Coordinaten-Axen-Winkel φ bleibt, aber DN senkrecht auf DM stehen soll:

$$a_2 = -\frac{1 + a_1.\cos\varphi}{a_1 + \cos\varphi},$$

oder, wenn die Coordinaten-Axen zugleich senkrecht (rechtwinklich) sind:

---

*) In den Beispielen (1.—4.) konnte dasselbe geschehen, so daß es nicht nöthig gewesen wäre, d zu geben, sondern dieses d jedesmal hätte gefunden werden können. So ist im (1ten Beispiel) der zu $-c$ gehörige Ordinaten-Werth der dort durch die Gleichung (2.) gegebnen Linie DM

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}(-c+a),$$

also die Ordinate $d =$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}(c-a). -$$

Im Beispiel (2.) ist $d = tg\,\alpha.(c-a). -$

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} = +\frac{a}{b},$$

genommen wird.

Da nun von dem Punkte E der Ordinaten-Werth $y = 0$ bekannt ist, so findet sich der Abscissen-Werth aus (2.):

$$-AE = \frac{-\delta}{a_2} - c \quad \text{oder} \quad AE = \frac{\delta}{a_2} + c.$$

Und da von dem Punkte F der Abscissen-Werth $x = 0$ gegeben ist, so findet sich aus (2.) sogleich dazu der Ordinaten-Werth:

$$AF = \delta + a_2 . c.$$

Und durch die Linien AE und AF sind nun die Punkte E und F bestimmt.

Drittes Kapitel.

Von den Gleichungen zwischen den Coordinaten-Werthen eines und desselben Punktes, auf zwei verschiedene Axenpaare bezogen. Von der Veränderung der Coordinaten-Axen.

§. 40. Aufgabe.

Es ist an eine gegebene Gerade $y = a_1 . x + b_1$ eine zweite Gerade gezogen, von einem gegebenen Punkt (α, β) aus, welche mit der gegebenen den Winkel ψ macht, und deren Gleichung $y - \beta = a_2 . (x - \alpha)$ seyn wird, wenn a_2 den (§. §. 36—38.) gemäß bestimmt worden ist. Man soll die Länge dieser zweiten Linie finden von dem Punkt (α, β), der durch H bezeichnet seyn mag, bis zu dem Punkte D, wo solche die erstere Linie schneidet *).

Auflösung. 1) Man suche die Coordinaten-Werthe x und y des Durchschnittspunktes D und findet nach (§. 30.):

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2},$$

wo $b_2 = \beta - a_2 . \alpha$ ist, so daß

$$x = \frac{\beta - a_2 . \alpha - b_1}{a_1 - a_2} \quad \text{und} \quad x - \alpha = \frac{\beta - a_1 . \alpha - b_1}{a_1 - a_2}$$

wird.

---

*) Für den speciellen Fall der (Fig. 20.) wäre DM die gegebene Linie $y = a_1 . x + b_1$, H der gegebene Punkt (α, β) und die Länge der Linie DH zu finden.

2) Aus den bekannten Coordinaten-Werthen (α, β) und (x, y) der Punkte H und D, findet sich dann ganz allgemein die Entfernung DH nach (§. 14.), nehmlich:

$$DH = +\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta) \,.\, cos\, \varphi}.$$

3) Weil aber der Punkt (x, y) zu der Linie

$$y - \beta = a_2 \,.\, (x - \alpha)$$

gehört, so hat man

$$y - \beta = a_2 \,.\, (x - \alpha);$$

folglich, wenn man diesen Werth statt $y-\beta$ in obige Formel für DH subſtituirt:

$$DH = (x-\alpha) \,.\, \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \,.\, cos\, \varphi},$$

oder

$$DH = \frac{\beta - a_1 \,.\, \alpha - b_1}{a_1 - a_2} \,.\, \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \,.\, cos\, \varphi},$$

wo, weil DH nothwendig abſolut iſt, die Wurzel $\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \,.\, cos\, \varphi}$ ihren poſitiven oder ihren negativen Werth vorſtellt, je nachdem $x - \alpha$ oder $\frac{\beta - a_1 \,.\, \alpha - b_1}{a_1 - a_2}$ poſitiv oder negativ iſt.

4) Dabei iſt aber nach (§. 36.):

$$1.1)\quad a_2 = -\frac{a_1 \,.\, sin\,(\psi \mp \varphi) + sin\, \psi}{a_1 \,.\, sin\, \psi + sin\,(\psi \mp \varphi)}$$

und daraus:

$$2.2)\quad a_1 - a_2 = sin\, \psi \,.\, \frac{1 + a_1^2 + 2a_1 \,.\, cos\, \varphi}{a_1 \,.\, sin\, \psi + sin\,(\psi \mp \varphi)},$$

ſo wie noch

$$1 + a_2^2 + 2a_2 \,.\, cos\, \varphi = \frac{Z}{[a_1 \,.\, sin\, \psi + sin\,(\psi \mp \varphi)]^2},$$

während

$$\begin{aligned} Z = {} & [sin^2 \psi + sin^2\,(\psi \mp \varphi) - 2\, sin\, \psi \,.\, cos\, \varphi \,.\, sin\,(\psi \mp \varphi)] \,.\, a_1^2 \\ & + 2[sin\, \psi \,.\, (sin\,(\psi \mp \varphi) + sin\,(\psi \mp \varphi)) \\ & \qquad - (sin^2 \psi + sin\,(\psi \mp \varphi) \,.\, sin\,(\psi \mp \varphi)) \,.\, cos\, \varphi] \,.\, a_1 \\ & + [sin^2\,(\psi \mp \varphi) + sin^2 \psi - 2 sin\, \psi \,.\, cos\, \varphi \,.\, sin\,(\psi \mp \varphi)] \end{aligned}$$

gedacht ist. — Es ist aber in Z der Faktor von a_1^2,

$$= sin^2\psi + sin(\psi \pm \varphi).[sin(\psi \pm \varphi) - 2\,sin\psi.cos\psi]$$
$$= sin^2\psi + sin(\psi \pm \varphi).[\pm sin(\varphi \mp \psi)]$$
$$= sin^2\psi - sin(\psi \pm \varphi).sin(\psi \mp \varphi)$$
$$= sin^2\psi - sin^2\psi.cos^2\varphi + sin^2\varphi.cos^2\psi$$
$$= sin^2\psi.sin^2\varphi + cos^2\psi.sin^2\varphi = sin^2\varphi. —$$

Und eben so wird der Coefficient von $2a_1$ in Z, weil

$$sin(\psi \mp \varphi) + sin(\psi \pm \varphi) = 2\,sin\psi.cos\varphi \quad \text{ist,}$$

jetzt $= [sin^2\psi - sin(\psi \pm \varphi).sin(\psi \mp \varphi)].cos\varphi = sin^2\varphi.cos\varphi.$

Endlich ist das dritte Glied von Z

$$= sin^2\psi + sin(\psi \mp \varphi).[sin(\psi \mp \varphi) - 2\,sin\psi.cos\varphi]$$
$$= sin^2\psi - sin(\psi \mp \varphi).sin(\psi \pm \varphi) = sin^2\varphi,$$

also $Z = sin^2\varphi.(1 + a_1^2 + 2a_1.cos\varphi)$, so daß

man erhält:

3,3) $$\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.cos\varphi} = sin\varphi.\frac{\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1.cos\varphi}}{a_1.sin\psi + sin(\psi \mp \varphi)}$$

und also:

4,4) $$\frac{\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.cos\varphi}}{a_1 - a_2} = \frac{sin\varphi}{sin\psi.\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1.cos\varphi}},$$

und zuletzt die Entfernung:

5,5) $$DH = \frac{sin\varphi.(\beta - a_1.\alpha - b_1)}{sin\psi.\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1.cos\varphi}},$$

wo die Wurzel $\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1.cos\varphi}$ mit $\beta - a_1.\alpha - b_1$ jedesmal ein und dasselbe (+ oder —) Zeichen haben muß, damit diese Entfernung wirklich eine absolute Zahl werde, wie solches seyn muß.

Anmerkung. Für rechtwinkliche Coordinaten-Axen wird, wegen $sin\varphi = 1$ und $cos\varphi = 0$, dieselbe Entfernung

$$DH = \frac{\beta - a_1.\alpha - b_1}{a_1 - a_2}\sqrt{1 + a_2^2},$$

oder $$DH = \frac{\beta - a_1 . \alpha - b_1}{\sin\psi . \sqrt{1 + a_1^2}},$$

in so ferne hier

$$a_2 = \frac{\mp a_1 . \cos\psi - \sin\psi}{a_1 . \sin\psi \mp \cos\psi}$$

und $$a_1 - a_2 = \sin\psi . \frac{1 + a_1^2}{a_1 . \sin\psi \mp \cos\psi}$$

und $$\sqrt{1 + a_2^2} = \frac{\sqrt{1 + a_1^2}}{a_1 \sin\psi \mp \cos\psi},$$

also auch

$$\frac{\sqrt{1 + a_2^2}}{a_1 - a_2} = \frac{1}{\sin\psi . \sqrt{1 + a_1^2}}$$ ist.

§. 41. Zusatz.

Dieselbe Aufgabe kann man auch so stellen: Es sind gegeben zwei sich schneidende Linien durch die Gleichungen:

1) $y = a_1 . x + b_1$ und 2) $y = a_2 . x + b_2$.

Man soll die Länge der mit (n. 2.) parallelen und durch den Punkt (α, β) hindurchgehenden Linie:

3) $y - \beta = a_2 . (x - \alpha)$

finden, von (α, β) oder H an, bis zu dem Punkte D, in welchem solche die (n. 1.) schneidet.

Man hat

$$DH = \frac{\beta - a_1 . \alpha - b_1}{a_1 - a_2} \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi};$$

und für rechtwinkliche Axen

$$DH = \frac{\beta - a_1 . \alpha - b_1}{a_1 - a_2} \cdot \sqrt{1 + a_2^2},$$

wo die Wurzeln $\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$ oder $\sqrt{1 + a_2^2}$ ihren positiven oder ihren negativen Werth vorstellen, je nachdem $\frac{\beta - a_1 . \alpha - b_1}{a_1 - a_2}$ positiv oder negativ ist.

Der Unterschied liegt also nur darin, daß hier a_2 gegeben ist, dort im (§. 40.) aber a_2 erst in a_1 und in dem gegebenen Winkel ψ nach (§. 36.) ausgedrückt werden muß.

§. 42. Aufgabe.

Man soll die Länge des Perpendikels von einem gegebenen Punkte (α, β) aus, auf eine gegebene Gerade $y = a_1 . x + b_1$, bis zu dem Punkt, wo sie letztere trifft, finden.

Auflösung. Offenbar ist diese Aufgabe von der des (§. 40.) nicht verschieden, nur daß jetzt der dortige Winkel ψ ein rechter ist, also $\cos \psi = 0$, $\sin \psi = 1$. — Man kann daher diese Aufgabe entweder direkt, wie die des (§. 40.) gelöst wurde, lösen, oder man kann sie als einen speciellen Fall aus (§. 40.) ableiten, indem man $\cos \psi = 0$, $\sin \psi = 1$ setzt.

Weil aber die Gleichung für das Perpendikel (als unendliche Richtung gedacht)

$$y - \beta = a_2 . (x - \alpha)$$

ist, unter der Voraussetzung, daß

$$1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos \varphi = 0,$$

also $$a_2 = -\frac{1 + a_1 . \cos \varphi}{a_1 + \cos \varphi}$$ ist,

so ist hier

$$a_1 - a_2 = \frac{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos \varphi}{a_1 + \cos \varphi}$$

und

$$\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi . \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos \varphi}}{a_1 + \cos \varphi},$$

daher die Länge des Perpendikels

$$DH = \frac{(\beta - a_1 . \alpha - b_1) . \sin \varphi}{\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos \varphi}}.$$

Und für rechtwinkliche Axen ist dasselbe Perpendikel

$$DH = \frac{\beta - a_1 . \alpha - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}}.$$

§. 43. Lehrsatz.

Ist MN eine beliebige, nur nicht mit der Ordinaten-Axe parallele gerade Linie, gegeben durch die Gleichung:

$$y_1 = A.x_1 + B;$$

und für einen Punkt (x, y), beliebig in derselben Ebene gedacht, der Ordinaten-Werth y größer, als der zu demselben Abscissen-Werth x gehörige Ordinaten-Werth y_1 (oder $A.x+B$) dieser Linie, so gilt dasselbe für jeden Punkt (x', y') welcher mit (x, y) auf derselben Seite der Geraden MN liegt. Und für jeden auf der andern Seite von MN gelegenen Punkt (x'', y''), ist dann der Ordinaten-Werth y'' allemal kleiner, als der zu demselben Abscissen-Werth x'' gehörige Ordinaten-Werth y_1 oder $A.x''+B$, der Geraden MN.

Beweis. Mag die MN wie in (Fig. 15.), oder parallel mit dieser, oder wie in (Fig. 16.), oder parallel mit dieser liegen, so fällt doch jedesmal der Lehrsatz in allen seinen Behauptungen in die Augen, so lange alle Punkte oberhalb der Abscissen-Axe X′AX gedacht werden, wo die Ordinaten-Werthe mit den Ordinaten-Maaßen zusammenfallen.

Um nun die Richtigkeit desselben Satzes auch für jeden andern Punkt, der unterhalb X′AX liegt darzuthun, denke man sich eine neue Abscissen-Axe parallel mit der alten, nach unten zu liegend und in der Richtung der Ordinaten-Axe von der alten um α entfernt, so gelten dieselben Behauptungen des Lehrsatzes in Bezug auf die neuen Coordinaten-Werthe und für jeden Punkt, weil jetzt jeder beliebig genommene Punkt oberhalb der neuen Abscissen-Axe gedacht werden kann (in so ferne diese neue Abscissen-Axe beliebig weit nach unten gerückt gedacht wird). Weil aber die alten Ordinaten-Werthe um α kleiner sind als die neuen, und weil nothwendig $z - \alpha > v - \alpha$ seyn muß, so oft $z > v$ ist, so gelten dieselben Behauptungen des Lehrsatzes auch für jeden Punkt und in Bezug auf die alte Axe.

Note. Man beachte jedoch, daß für alle Punkte, welche unterhalb der Abscissen-Axe liegen, die Ordinaten-Werthe negative Zahlen sind, daß also für solche Punkte ein Ordinaten-Werth größer seyn wird, wenn der Punkt der Abscisse näher liegt, d. h. wenn die Ordinate selbst kleiner ist, weil (E. 14.) $-p > -q$ ist, so oft $p < q$, unter p und q absolute Zahlen gedacht.

§. 44. Zusatz.

Ist daher $y_1 = A.x_1 + B$ noch immer die Gleichung für eine beliebige, jedoch nicht mit der Ordinaten-Axe parallele Linie MN, so ist

$$y - A.x - B$$

fortwährend positiv, oder fortwährend negativ, oder fortwährend Null, je nachdem der Punkt (x, y) beständig auf der einen Seite, oder beständig auf der andern Seite der Linie MN, oder endlich beständig in der Linie MN selbst liegt.

Anmerkung. In den Aufgaben und Resultaten der (§.§. 40—42.) ist daher

$$\beta - a_1.\alpha - b_1$$

fortwährend positiv, oder fortwährend negativ, oder fortwährend Null, je nachdem der Punkt (α, β) fortwährend auf der einen, oder fortwährend auf der andern Seite der Linie

$$y = a_1.x + b_1$$

liegt, oder fortwährend in dieser Linie selbst.

§. 44½.

Bemerkung. Bereits (§. 9.) haben wir uns neue Axen gedacht, aber parallel mit den alten; haben für irgend einen Punkt in der Ebene seine alten Coordinaten-Werthe durch x und y, seine neuen durch x' und y' bezeichnet, und gefunden, daß, wenn α und β die alten Coordinaten-Werthe sind des neuen Anfangspunktes, dann allemal die Gleichungen statt finden:

$$x = x' + \alpha \quad \text{und} \quad y = y' + \beta,$$

so daß x und y in x' und y', aber auch umgekehrt x' und y' in x und y ausgedrückt werden können.

Stellen wir nun dieselbe Aufgabe viel allgemeiner: Es seyen nehmlich (Fig. 21.) X′AX und Y′AY die alten Axen, und die neuen Axen nicht parallel mit den alten, sondern ganz beliebig liegend gegen die alten, wie z. B. $X'_1A_1X_1$ und $Y'_1A_1Y_1$, welche einen beliebigen Winkel ψ mit einander bilden mögen. Von einem beliebigen Punkt M mögen nun die alten Coordinaten-Werthe durch x und y, seine neuen dagegen durch x' und y' vorgestellt seyn; man soll die Gleichungen finden, welche zwischen x und y, und x' und y' statt finden müssen.

Diese Aufgabe wird nun gelöst werden, wenn man nach (§. §. 41. 42.) die Längen der Linien MP_1 und MQ_1 findet, welche parallel mit einer der beiden gegebenen Geraden:

$$y = a_1 . x + b_1 \qquad \text{oder} \qquad y = a_2 . x + b_2$$

laufen und jedesmal von dem Punkt M an bis zu dem Durchschnittspunkt derselben mit der andern der gegebenen Geraden genommen sind, weil die eine dieser Längen, z. B. MQ_1, die neue Abscisse, die andere MP_1 dagegen die neue Ordinate seyn wird.

In so ferne alle einzelnen Theile dieses ganzen Geschäftes früher bereits behandelt worden sind, so kann sich demselben keine Schwierigkeit weiter entgegenstellen. Weil aber diese Aufgabe so allgemein behandelt werden muß, daß ihre Auflösung für jeden möglichen in der Ebene genommenen Punkt M gilt und auch für jede mögliche Lage der neuen Axen, so wollen wir dieselbe doch zuvor in einem besondern Falle betrachten.

§. 45. Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien gegeben durch die Gleichungen (auf Axen bezogen, die in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander bilden.):

$$1)\ y_1 = a_1 . x_1 \qquad \text{und} \qquad 2)\ y_2 = a_2 . x_2,$$

dabei $a_2 > a_1$ angenommen, so daß sich diese Linien schneiden (in dem Anfangspunkt der Coordinaten); und nun die erstere als neue Abscissen-Axe, die andere als neue Ordinaten-Axe gedacht. Man soll, während x und y die alten, x' und y' aber

die neuen Coordinaten-Werthe eines und deſſelben, in der Ebene ganz beliebig gedachten Punktes M vorſtellen, die Gleichungen finden, welche zwiſchen x', y' und x und y ſtatt finden werden.

Auflöſung. Nach (§§. 40. und 41.) iſt die neue Abſciſſe $= \frac{y - a_2 . x}{a_2 - a_1} \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi}$;

dieſelbe iſt aber auch $= \pm x'$. — Ferner iſt die neue Ordinate $= \frac{y - a_1 . x}{a_1 - a_2} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$,

aber dieſelbe auch $= \pm y'$*). — Alſo hat man

$$x' = \frac{y - a_2 . x}{a_2 - a_1} \cdot \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi}$$

und $$y' = \frac{y - a_1 . x}{a_1 - a_2} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi},$$

und man muß nur darauf ſehen, daß man die (+ oder —) Zeichen der Wurzelwerthe rechts jedesmal ſo nimmt, daß x' und y' ſo poſitiv oder negativ werden, wie ſolches die Annahme der erſten Region der neuen Axen erfordert.

Nimmt man aber zur erſten Region der neuen Axen diejenige, welche von beiden auf der poſitiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche ſich erſtreckenden Richtungen gebildet wird, ſo iſt für jeden Punkt (x, y), der in dieſer erſten Region liegt, nothwendig $y > y_1$ und $y < y_2$ (unter y_1 und y_2 die Ordinaten-Werthe der zu einem beliebigen poſitiven

---

*) Da nehmlich x' und y' die neuen Coordinaten-Werthe vorſtellen, ſo wird es von der Annahme der erſten Region dieſer neuen Axen abhängen, ob für einen gegebenen Punkt (x, y) ſeine neuen Coordinaten-Werthe x' und y' poſitiv oder negativ ſeyn werden. Die Abſciſſe (und Ordinate) ſelber muß immer abſolut ſeyn und wird daher durch $+x'$ (oder $+y'$) ausgedrückt, wenn x' (oder y') poſitiv iſt; dagegen durch $-x'$ (oder $-y'$), wenn x' (oder y') eine negative Zahl vorſtellen ſollte.

$x_1 = x_2 = x$ gehörigen Punkte der neuen Axen verstanden, so daß, weil $y_1 = a_1 . x$ und $y_2 = a_2 . x$, und, nach der Annahme, $a_2 > a_1$, also auch $a_2 . x > a_1 . x$ seyn muß, nothwendig $y_2 > y_1$ seyn wird). Demnach ist für jeden solchen

Punkt $y - y_1$ d. h. $y - a_1 . x$ positiv,

dagegen $y - y_2$ d. h. $y - a_2 . x$ negativ.

Und weil ferner $a_2 - a_1$ positiv, dagegen $a_1 - a_2$ negativ ist, so müssen für jeden Punkt (x, y), der in der jetzigen ersten Region der neuen Axen liegt, so daß x' und y' nothwendig positiv seyn müssen, in den gefundenen Gleichungen:

$$x' = \frac{y - a_2 . x}{a_2 - a_1} \cdot \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi}$$

und

$$y' = \frac{y - a_1 . x}{a_1 - a_2} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi},$$

weil die ersten Faktoren rechts allemal negativ sind, die Wurzeln ihre negativen Werthe vorstellen; ihre positiven (oder absoluten) dagegen, wenn man die Gleichungen so schreibt:

$$\text{I.} \quad x' = \frac{y - a_2 . x}{a_1 - a_2} \cdot \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi}$$

und

$$\text{II.} \quad y' = \frac{y - a_1 . x}{a_2 - a_1} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}.$$

Weil jedoch ferner nach (§. 44.) $y - a_2 . x$ und x' zugleich ihr (+ oder —) Zeichen verändern, so wie der Punkt (x, y) auf die andere Seite der neuen Ordinaten-Axe $y_2 = a_2 . x_2$ zu liegen kommt, und weil ferner auch $y - a_1 . x$ mit y' ihr (+ oder —) Zeichen zugleich ändern, so wie der Punkt (x, y) von der positiven Seite der neuen Abscissen-Axe zu der negativen übergeht, so bleiben die Gleichungen (I. u. II.) noch richtig für jeden Punkt (x, y), in welcher der alten oder neuen Regionen er nur immer liegen mag, wenn nur diejenige der neuen Regionen zur ersten genommen wird, welche von den auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche sich erstreckenden Richtungen der neuen Axen gebildet wird, und wenn zu

gleicher Zeit statt der in (I. und II.) vorkommenden Quadratwurzeln:

$$\sqrt{1+a_1^2+2a^1 . cos\,\varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+a_2^2+2a_2 . cos\,\varphi}$$

ihre absoluten (positiven) Werthe gesetzt werden.

§. 46. Zusatz.

Und nach (§. 34.) ist der Winkel ψ, welchen diese neuen Axen in ihrer ersten Region (so wie sie oben angenommen worden) mit einander bilden, gegeben durch die Gleichung:

$$cos\,\psi = \frac{1+a_1 . a_2+(a_1+a_2) . cos\,\varphi}{\sqrt{1+a_1^2+2a_1 . cos\,\varphi} . \sqrt{1+a_2^2+2a_2 . cos\,\varphi}},$$

in welcher die Wurzeln ebenfalls ihre absoluten Werthe vorstellen, so daß dieser Winkel ψ ein spitzer, stumpfer oder rechter seyn wird, je nachdem

$$1+a_1 . a_2+(a_1+a_2) . cos\,\varphi$$

positiv, negativ oder Null ist.

§. 47. Zusatz.

Nimmt man in der Gleichung (I. §. 45.) für $\sqrt{1+a_1^2+2a_1 . cos\,\varphi}$ ihren negativen Werth, während man der Quadrat-Wurzel in (II.) ihren absoluten Werth läßt, so hat man die andere Seite der neuen Ordinaten-Axe zur positiven genommen, die positive Seite der neuen Abscissen-Axe aber gelassen, und die Gleichung des (§. 46.) gibt, wenn man derselben Wurzel dieselbe Zeichenänderung zuläßt, weil dann $cos\,\psi$ sein Zeichen ändert, den Nebenwinkel von ψ, also noch immer den Winkel in der (jetzigen) ersten Region der neuen Axen (wenn man nur in ihr dieselbe Wurzel $\sqrt{1+a_1^2+2a_1 . cos\,\varphi}$ negativ nimmt).

Nimmt man in der Gleichung (II. §. 45.) die vorkommende Quadrat-Wurzel negativ, die der (I. §. 45.) dagegen positiv, so ist abermals eine andere Region als erste genommen, in so ferne jetzt die entgegengesetzte Seite der neuen Abscissen-Axe als die positive genommen, während die positive Seite der neuen Ordi-

naten-Axe wie im (§. 45.) geblieben ist. Und nimmt man in der Formel (§. 46.) für $cos\,\psi$ dieselbe Wurzel $\sqrt{1+a_2^2+2a_2.cos\varphi}$ negativ, während die andere absolut bleibt, so bekommt man offenbar den Nebenwinkel des (§. 45.) unter den dortigen Voraussetzungen erhaltenen, also wiederum den Winkel in der jetzigen ersten Region.

Und nimmt man endlich beide Quadrat-Wurzeln in (I. und II. des §. 45.) negativ, so nimmt man dadurch die entgegengesetzten Seiten der neuen Abscissen- und Ordinaten-Axe zu den positiven an, und die Formel des (§. 46.) gibt dann, dieselben Quadrat-Wurzeln ebenfalls negativ gedacht, denselben Winkel ψ, wie im (§. 46.) selbst, welcher abermals der Winkel in der jetzigen ersten Region der neuen Axen ist, in so ferne solcher jetzt der Scheitel-Winkel von dem in (§. 45.) selbst angenommenen, und eben deshalb jenem gleich ist.

§. 48. Zusatz.

Sind also $y_1 = a_1.x_1$ und $y_2 = a_2.x_2$ die neuen Coordinaten-Axen (erstere die neue Abscissen-Axe), und sind für einen beliebigen Punkt in der Ebene, x und y die alten, x′ und y′ dagegen die neuen Coordinaten-Werthe, so ist allemal:

$$1)\quad x' = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2}.(y - a_2.x),$$

und

$$2)\quad y' = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1}.(y - a_1.x),$$

wenn α_1 die Wurzel $\sqrt{1+a_1^2+2a_1.cos\varphi}$,

und α_2 die Wurzel $\sqrt{1+a_2^2+2a_2.cos\varphi}$

vorstellt, und für diese Wurzeln beliebig ihre positiven oder ihre negativen Werthe gesetzt werden, wenn man nur jedesmal diejenige der 4 Regionen der neuen Axen als die erste nimmt, welche durch die (§. §. 45. und 47.) bestimmt worden ist.

Und allemal ist dann der Winkel ψ der neuen Axen in der

zur ersten angenommenen Region derselben, gegeben durch die Gleichung:

$$3)\ \cos\psi = \frac{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2).\cos\varphi}{\alpha_1 . \alpha_2},$$

wenn nur α_1 und α_2 dieselben (positiven oder negativen) Werthe der Wurzeln vorstellen, welche in (1. und 2.) gedacht worden sind.

Will man aber diejenige Region zur ersten nehmen, deren beide Schenkel auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche fortlaufen, so muß man in allen 3 Gleichungen α_1 und α_2 absolut (positiv) nehmen.

§. 49. Zusatz.

Wir haben unter den Gleichungen $y_1 = a_1 . x_1$ und $y_2 = a_2 . x_2$ diejenige für die neue Abscissen-Axe genommen, in welcher der Coefficient a_1 kleiner war, als a_2 in der andern. Hätte man umgekehrt die zweite als Abscissen-Axe genommen, die erstere also als Ordinaten-Axe, so hätte man dieselben Resultate des (§. 48.) erhalten, nur daß x' und y' mit einander vertauscht werden mußten, wenn x' jetzt wieder den neuen Abscissen-Werth, y' dagegen den neuen Ordinaten-Werth vorstellen sollte. Man hätte also dann

$$y' = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . (y - a_2 . x),$$

$$x' = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . (y - a_1 . x)$$ erhalten.

Und wenn man hier wieder a_1 statt a_2, und a_2 statt a_1, also auch α_1 statt α_2, und α_2 statt α_1 setzt, so daß die neue Abscissen-Axe wiederum durch $y = a_1 . x$, und die neue Ordinaten-Axe durch $y = a_2 . x$ ausgedrückt ist, nur daß jetzt $a_1 > a_2$ gedacht worden, so reduciren sich diese Gleichungen wiederum genau auf die des (§. 48.), so daß der (§. 48.) immer gültig bleibt, mag $a_1 < a_2$ oder $a_1 > a_2$ seyn.

Daß a_1 nicht $= a_2$ seyn darf, fällt in die Augen, weil

sonst die neuen Abscissen- und Ordinaten-Axen sich gar nicht schneiden würden.

§. 50. Zusatz.

Aus den Resultaten des (§. 48.), nehmlich:

$$1)\ x' = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2}.(y - a_2.x)$$

und

$$2)\ y' = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1}.(y - a_1.x)$$

folgt auch noch, wenn man diese Gleichungen nach x und nach y auflöst:

$$3)\ x = \frac{1}{\alpha_2}.y' + \frac{1}{\alpha_1}.x'$$

und

$$4)\ y = \frac{a_2}{\alpha_2}.y' + \frac{a_1}{\alpha_1}.x'.$$

§. 51. Aufgabe.

Es ist allgemeiner noch die neue Abscissen-Axe durch die Gleichung $y_1 = a_1.x_1 + b_1$ und die neue Ordinaten-Axe durch die Gleichung $y_2 = a_2.x_2 + b_2$ (beide Gleichungen, wie immer, auf die alten Axen bezogen, welche in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander bilden) gegeben. Für einen beliebigen Punkt in der Ebene sind x und y die alten, t und u dagegen die neuen Coordinaten-Werthe. Man soll die Gleichungen finden, welche zwischen x, y, t und u statt finden werden.

Auflösung. Man denke sich zuerst die mittlern *) Axen $y_1 = a_1.x_1$ und $y_2 = a_2.x_2$, wie sie (§. 45.) angenommen sind, und welche mit den neuen Axen $y_1 = a_1.x_1 + b_1$

---

*) Bloß um die 3 verschiedenen Paare von Coordinaten-Axen besser von einander unterscheiden zu können, sind hier die besondern Benennungen alte, mittlere und neue Axen gebraucht, worauf sich dann auch alte, mittlere und neue Coordinaten-Werthe eines und desselben Punktes, beziehen.

und $y_2 = a_2 . x_2 + b_2$ beziehlich parallel laufen; bezeichne die alten Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes der neuen Axen (des neuen Anfangspunktes der Coordinaten) durch a und durch b, so wie die mittlern Coordinaten-Werthe desselben Punktes durch a' und b', so ist nach (§. 30.):

$$1)\ a = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

und

$$2)\ b = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2};$$

dann aber nach (§. 48.), unter den dortigen Voraussetzungen:

$$3)\ a' = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . (b - a_2 . a)$$

und

$$4)\ b' = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . (b - a_1 . a).$$

Zuletzt ist nach (§. 9.) für einen beliebigen Punkt M, dessen mittlere Coordinaten-Werthe x' und y', dessen neue Coordinaten-Werthe aber t und u sind:

$$5)\ x' = a' + t$$

und

$$6)\ y' = b' + u;$$

dabei aber nach (§. 48.) unter den dortigen Voraussetzungen, wenn x und y die alten Coordinaten-Werthe desselben Punktes M sind:

$$7)\ x' = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . (y - a_2 . x)$$

und

$$8)\ y' = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . (y - a_1 . x).$$

Eliminirt man aus (5 — 8.) x' und y' und setzt statt a' und b' ihre Werthe aus (3. und 4.), so erhält man:

$$9)\ t = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . [(y - a_2 . x) - (b - a_2 . a)],$$

$$10)\ u = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . [(y - a_1 . x) - (b - a_1 . a)].$$

Und aus (1. und 2.) folgt:

11) $b - a_2 . a = b_2$ und 12) $b - a_1 . a = b_1$;

also

13) $t = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . (y - a_2 . x - b_2)$,

14) $u = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . (y - a_1 . x - b_1)$.

Und da die Gleichungen (5. und 6.) nach (§. 9.) nur dann gelten, wenn bei den parallelen mittlern und neuen Axen die positiven Seiten derselben nach einerlei Richtung zu liegen, so gelten diese Endresultate (n. n. 13. und 14.), durch welche die gegenwärtige Aufgabe vollständig gelöst ist, nothwendig unter allen den Voraussetzungen und Modifikationen in Bezug auf die (+ oder —) Zeichen der Wurzeln α_1 und α_2, wie solche (§. 48.) festgesetzt sind.

Anmerkung. Man konnte sich auch statt der in der vorstehenden Auflösung zu Hilfe genommenen mittlern Axen:

$$y_1 = a_1 . x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = a_2 . x_2 ,$$

andere solche mittlere Axen denken, parallel mit den alten und durch den neuen Anfangspunkt (a, b) durch gehend. Würden jetzt diese mittelern Coordinaten-Werthe eines auf die alten Axen bezogenen Punktes (x, y) durch x'' und y'' vorgestellt, so hatte man, unter den Voraussetzungen des (§. 9.):

1) $x = x'' + a$ und 2) $y = y'' + b$;

d. h. 3) $x'' = x - a$ und 4) $y'' = y - b$.

Und weil sich nun diese mittlern Axen zu den neuen verhalten, wie (§. 45.) die alten zu den neuen sich verhielten, so hat man nach (§. 48.):

5) $t = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . (y'' - a_2 . x'')$,

6) $u = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . (y'' - a_1 . x'')$,

welches dieselben Gleichungen sind, wenn man $x-a$ und $y-b$ statt x'' und y'' (nach 3. und 4.) setzt, welche in der Auflösung des (§.) unter (n. n. 9. und 10.) gefunden worden sind.

Da ferner a und b alte Coordinaten-Werthe sind des neuen Anfangspunktes, also des Durchschnittspunktes der neuen Axen, so müssen solche beiden Gleichungen:

$$y = a_1 . x + b_1 \quad \text{und} \quad y = a_2 . x + b_2$$

zugleich genügen, also daß

$$b = a_1 . a + b_1 \quad \text{und} \quad b = a_2 . a + b_2$$

identische Gleichungen seyn müssen, weshalb sogleich

$$b - a_1 . a = b_1 \quad \text{und} \quad b - a_2 . a = b_2$$

gefunden wird, wie solches in der Auflösung des (§.) etwas weniger elegant, aus den vorher berechneten Werthen von a und b durch Substitution gefunden worden ist.

Immer aber erhält man dieselben Resultate.

Note. Daß man dieselbe allgemeinere Aufgabe des (§. 51.) sogleich nach (§. 44.) hätte lösen können und vermöge der (§. §. 40. und 41.) eigentlich dort schon gelöst war, fällt bei dem ersten Anblick in die Augen. Wir haben hier nur deshalb einen andern Weg betreten, um wegen der ($\pm$) Zeichen der Wurzeln α_1 und α_2 in Beziehung zu der Region der neuen Axen, welche als erste gedacht wird, bequemer in's Klare kommen zu können.

§. 52. Zusatz.

Es ist also unter den Voraussetzungen des (§. 51.):

$$1)\ t = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2} . (y - a_2 . x - b_2)$$

und

$$2)\ u = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1} . (y - a_1 . x - b_1).$$

Und daraus wieder, wenn man diese Gleichungen nach x und nach y auflöst:

$$3)\ x = \frac{1}{\alpha_2} . u + \frac{1}{\alpha_1} . t + \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2},$$

$$4)\ y = \frac{a_2}{\alpha_2} . u + \frac{a_1}{\alpha_1} . t + \frac{a_1 . b_2 - b_1 . a_2}{a_1 - a_2},$$

wenn nur diejenige Region der neuen Axen zur ersten genommen wird, deren beide Schenkel auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche sich erstrecken, und α_1 und α_2 die absoluten (positiven) Werthe der Wurzeln:

$$\sqrt{1+a_1^2+2a_1.\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}$$

vorstellen.

Und unter denselben Voraussetzungen gibt:

$$5)\ \cos\psi = \frac{1+a_1.a_2+(a_1+a_2).\cos\varphi}{\alpha_1.\alpha_2}$$

den Winkel ψ, welchen die neuen Axen in ihrer ersten Region mit einander machen.

Und gibt man den α_1 und α_2, einem allein oder allen beiden, die negativen Werthe der Wurzeln, so bleiben diese 5 Gleichungen noch richtig, nur ist dann jedesmal eine andere Region der neuen Axen zur ersten genommen, und zwar ist,

wenn α_1 negativ und α_2 positiv gedacht wird, die positive Seite der neuen Ordinaten-Axe in die negative übergegangen, und

wenn α_2 negativ, aber α_1 positiv genommen, so ist die positive Seite der neuen Abscissen-Axe in die negative übergegangen; endlich

wenn α_1 und α_2 zugleich negativ genommen werden, so ist dadurch von jeder der neuen Coordinaten-Axen die entgegengesetzte Seite zur positiven genommen.

Der Winkel ψ aus der Gleichung (5.), wenn man α_1 und α_2 dieselben Werthe vorstellen läßt, welche bei jeder Verschiedenheit in der Annahme der ersten Region ihnen in den Gleichungen (1. und 2.), also dann auch in den andern (3. und 4.) zukommen müssen, ist aber jedesmal der Winkel in der angenommenen ersten Region.

Note. Anfänger mögen noch besonders den Umstand wohl bemerken, daß vermöge des Lehrsatzes (§. 44.) $y-a_2.x-b_2$ allemal sein (+ oder —) Zeichen beibehält oder ändert, also vom positiven zum

negativen oder vom negativen zum positiven übergeht, so oft der Punkt, dessen alte Coordinaten-Werthe x und y sind, auf einer und derselben Seite der durch die Gleichung $y_2 = a_2 . x_2 + b_2$ gegebenen neuen Ordinaten-Axe bleibt oder von der einen auf die andere Seite derselben übergeht; — daß aber dasselbe in demselben Moment auch mit dem neuen Abscissen-Werth t der Fall ist; — daß also eben daraus hervorgehe, wie das $(\pm)$ Zeichen von α_1 in der Gleichung (§. 52. n. 1.), wenn es für einen einzigen Punkt (x, y) seine Bestimmung der Annahme der ersten Region der neuen Axen gemäß erhalten habe, nun für jeden andern Punkt (x, y), wo er nur immer in derselben Ebene gedacht werden mag, beständig dasselbe Zeichen behalte, unabhängig von dem Uebergange des Punktes (x, y) von einer Seite der neuen Ordinaten-Axe zur entgegengesetzten.

Dasselbe mag man von α_2 in der Gleichung (§. 52. n. 2.) bemerken, aus denselben Gründen.

Anmerk. Setzt man in den Resultaten der (§§. 50—52.) $b_1 = b_2 = 0$, so erhält man sogleich die Resultate des einfachern Falles (§§. 45. und 48.), in welchem die neuen Axen durch den alten Anfangspunkt durchgehen.

§. 53. Zusatz.

1) Sind die alten Coordinaten-Axen rechtwinklich gewesen, so bleiben die Gleichungen (1 — 4. des §. 52.) und alles Uebrige unverändert, nur α_1 und α_2 werden dann die einfachern Wurzeln

$$\sqrt{1+a_1^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+a_2^2}$$

vorstellen, übrigens unter denselben Bestimmungen der (+ und —) Zeichen derselben; und die Gleichung (5.) reducirt sich auf

$$\cos\psi = \frac{1+a_1 . a_2}{\alpha_1 . \alpha_2} = \frac{1+a_1 . a_2}{\sqrt{1+a_1^2} . \sqrt{1+a_2^2}} .$$

2) Bilden dagegen die alten Axen in ihrer ersten Region den Winkel φ, und sollen die neuen rechtwinklich werden, so bleibt alles in (§. 52.) ebenfalls unverändert, nur daß dann

$$\cos\psi = 0, \quad \text{also} \quad 1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi = 0$$

werden muß, so daß dadurch a_2 in a_1 oder a_1 in a_2 bestimmt werden kann.

Namentlich wird dann

$$a_2 = -\frac{1 + a_1 . \cos\varphi}{a_1 + \cos\varphi},$$

und daraus

$$\alpha_2 = \pm\frac{\sin\varphi}{a_1 + \cos\varphi} . \alpha_1$$

(vergl. §. 42.), wo man rechts jedesmal dasjenige (+ oder —) Zeichen beibehalten wird, welches in jedem gegebenen speciellen Falle der α_2 das ihr nach (§. 52.) gehörige Zeichen gibt.

3) Sind die alten Axen rechtwinklich gewesen und sollen die neuen wiederum rechtwinklich werden, so bleiben die Gleichungen (1 — 4. §. 52.) noch immer dieselben, nur daß, weil $\cos\psi = 0$ werden muß und $\cos\varphi = 0$ ist,

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + a_1^2}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{1 + a_2^2},$$

$$1 + a_1 . a_2 = 0, \qquad a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

und

$$\alpha_2 = \pm\frac{1}{a_1} . \alpha_1$$

seyn wird, wo im Falle α_1 und α_2 ihre absoluten Werthe vorstellen sollen, in der letztern Gleichung das + Zeichen genommen wird, wenn a_1 positiv ist, das — Zeichen dagegen, wenn a_1 negativ seyn sollte.

§. 54. Zusätze.

1) Bleibt die alte Abscissen-Axe zugleich auch die neue, so ist die Gleichung der neuen jetzt:

$$y_1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad y_1 = 0 . x_1 + 0,$$

also $b_1 = 0,\ a_1 = 0$ und $\alpha_1 = \pm 1$,

und zwar $\alpha_1 = +1$, wenn die positive Seite der neuen Ordinaten-Axe diejenige ist, welche auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe im Unendlichen sich gegen die positive Richtung der alten Abscissen-Axe kehrt; dagegen $\alpha_1 = -1$, wenn die entgegen-

gesetzte Seite der neuen Ordinaten-Axe zur positiven genommen wird. — Lassen wir den erstern Fall statt finden, wo $\alpha_1 = +1$ ist, so reduciren sich die Gleichungen des (§. 52.) auf:

$$1.1)\quad t = -\frac{1}{a_2}.(y - a_2.x - b_2),$$

$$2.2)\quad u = \frac{\alpha_2}{a_2}.y$$

und

$$3.3)\quad x = \frac{1}{\alpha_2}.u + t - \frac{b_2}{a_2},$$

$$4.4)\quad y = \frac{a_2}{\alpha_2}.u.$$

Und in dem andern Falle, wo $\alpha_1 = -1$ ist, hat man:

$$5.5)\quad t = +\frac{1}{a_2}.(y - a_2.x - b_2),$$

$$6.6)\quad u = \frac{\alpha_2}{a_2}.y$$

und

$$7.7)\quad x = \frac{1}{\alpha_2}.u - t - \frac{b_2}{a_2},$$

$$8.8)\quad y = \frac{a_2}{\alpha_2}.u,$$

Da ferner in beiden Fällen α_2 positiv genommen werden muß, wenn zur ersten Region der neuen Axen diejenige genommen wird, welche von den, auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche sich erstreckenden Richtungen der neuen Axen gebildet wird, so wird, im Falle die neue Ordinaten-Axe sich rechts der alten und oberhalb der Abscissen-Axe (neue und alte Abscissen-Axe ist für dasmal eine und dieselbe) in's Unendliche sich erstreckt, d. h. im Falle a_2 positiv ist, α_2 positiv genommen werden, wenn die positive Seite der Abscissen-Axe beibehalten wird; aber eben deshalb wird auch, im Falle sich die neue Ordinaten-Axe rechts der alten, und unterhalb der Abscissen-Axe in's Unendliche erstreckt, d. h. im

Falle a_2 negativ ist, α_2 nur dann positiv zu nehmen seyn, wenn man die der vorigen entgegengesetzte Seite der neuen Abscissen-Axe jetzt zur positiven nimmt, so daß, will man die positive Seite der Abscissen-Axe beibehalten, zugleich als die positive Seite der neuen Abscissen-Axe, in diesem letztern Falle α_2 negativ zu nehmen seyn wird.

Ferner findet sich der Winkel ψ in der ersten Region der neuen Axen, gegeben durch die Gleichung (5. §. 52.), welche jetzt übergeht im erstern Fall, wo $\alpha_1 = +1$ ist, in

$$\cos\psi = \frac{1 + a_2 . \cos\varphi}{\alpha_2};$$

im andern Falle dagegen wo $\alpha_1 = -1$, in

$$\cos\psi = -\frac{1 + a_2 . \cos\varphi}{\alpha_2};$$

wo α_2 denselben positiven oder negativen seiner beiden Werthe vorstellt, welcher in den vorstehenden Gleichungen gedacht worden ist; den positiven nehmlich, wenn a_2 positiv ist, den negativen dagegen, wenn a_2 negativ ist, und wenn in beiden Fällen die positive Seite der Abscissen-Axe beibehalten werden soll.

Note. Es ist aber in jedem Falle ψ der Winkel, welchen die Linie $y_2 = a_2 . x + b_2$ mit der alten Abscissen-Axe macht, und welcher (§. 27.) bereits direckt gefunden worden ist.

2) Bleibt die alte Abscissen-Axe nicht allein, sondern auch der alte Anfangspunkt zugleich der neue, so hat man noch $b_2 = 0$, und die Gleichungen der vorstehenden (n. 1.) werden dann um das Glied verkürzt, welches b_2 enthält, während alle Modifikationen und übrigen Voraussetzungen unverändert bleiben.

3) Bleibt die alte Ordinaten-Axe zugleich die neue, so daß nur die Abscissen-Axe geändert wird; so ist die Gleichung der letztern: $y_1 = a_1 . x_1 + b_1$,

die der erstern aber $x_2 = 0$, d. h.

$$y_2 = a_2 . x_2 + b_2 \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{1}{a_2} . y_2 - \frac{b_2}{a_2},$$

unter der Voraussetzung daß $b_2=0$ und $\frac{1}{a_2}=0$, oder $\frac{1}{a_2}=p$, also $a_2=\frac{1}{p}$ ist, p selbst aber Null vorstellt.

Man wird daher die Formeln des (§. 52.), um sie auch für diesen Fall brauchbar zu machen, der (E. 4.) gemäß, erst so umwandeln müssen, daß $\frac{1}{p}$ statt a_2 gesetzt, das p überall aus dem Nenner weggeschafft und zuletzt erst $=0$ genommen wird. Man erhält aber für $a_2=\frac{1}{p}$, jetzt:

$$\alpha_2=\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}=\sqrt{1+\frac{1}{p^2}+2\frac{1}{p}.\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1}{p}.\sqrt{1+p^2+2p.\cos\varphi};$$

also nach (§. 52.), wenn man diese Werthe statt b_2, a_2 und α_2 setzt:

$$t=\frac{\alpha_1}{a_1-\frac{1}{p}}\left(y-\frac{1}{p}.x\right)=\frac{\alpha_1}{p.a_1-1}.(p.y-x),$$

$$u=\frac{\frac{1}{p}.\sqrt{1+p^2+2p.\cos\varphi}}{\frac{1}{p}-a_1}(y-a_1.x-b_1)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+p^2+2p.\cos\varphi}}{1-p.a_1}(y-a_1.x-b_1);$$

woraus zuletzt für $p=0$

$$t=\alpha_1.x,$$

$$u=\sqrt{1}.(y-a_1.x-b_1)$$

folgt, wo es jedoch noch unbestimmt ist, ob man $+1$ oder -1 statt der $\sqrt{1}$ schreiben soll.

Behält man aber die positive Richtung*) der Ordinaten-Axe auch jetzt noch bei, während diejenige Richtung der neuen Abscissen-Axe, welche auf der positiven Seite der alten (neuen) Ordinaten-Axe in's Unendliche geht, als die positive betrachtet wird, so ist erstlich α_1 positiv zu nehmen, weil der letztern Annahme wegen, für jedes positive x, auch t positiv werden muß; und weil wegen der erstern Annahme für jeden Punkt (x, y), welcher auf der positiven Seite der neuen Abscissen-Axe liegt, für $x_1 = x$, $y > y_1$ d. h. $y - a_1 . x - b_1$ positiv werden muß, mit u zugleich, so wird $\sqrt{1} = +1$ zu nehmen seyn, so daß dann die obigen beiden Gleichungen in

$$1.1)\ t = \alpha_1 . x,$$
$$2.2)\ u = y - a_1 . x - b_1$$

übergehen und

$$3.3)\ x = \frac{1}{\alpha_1} . t,$$

$$4.4)\ y = u + \frac{a_1}{\alpha_1} . t + b_1$$

liefern müssen.

Und die Gleichung (5.) geht dann auf demselben Wege in

$$\cos\psi = \frac{a_1 + \cos\varphi}{\alpha_1}$$

über, wo ψ der Winkel ist der neuen Axen in ihrer ersten Region.

Note. Es ist aber ψ auch der Winkel, welchen die Linie $y_1 = a_1 . x_1 + b_1$ mit der alten Ordinaten-Axe bildet, wie solcher (§. 27.) direkt schon gefunden worden.

4) Bleibt die Ordinaten-Axe und der Anfangspunkt ungeändert, so daß die neue Abscissen-Axe bloß durch die Gleichung

---

*) Man verwechsle nur nie positive Seite und positive Richtung der Axen. Durch die positive Richtung der Abscissen-Axe ist die positive Seite der Ordinaten-Axe und umgekehrt, durch die letztere wiederum die erstere gegeben. Eben so bestimmt die Annahme der positiven Richtung der Ordinaten-Axe zugleich die positive Seite der Abscissen-Axe.

$$y_1 = a_1 . x_1$$

gegeben ist, so ist in (n. 3.) auch noch $b_1 = 0$ und die Gleichungen (n. 3.) werden daher noch um das Glied b_1 verkürzt erscheinen.

Anmerkung 1. Anfänger werden wohl thun, diese 4 speciellen Fälle direkt nach Anleitung der (§§. $44\frac{1}{2}$, 45 oder 51.) zu behandeln, was insbesondere hinsichtlich der (n.n. 3 und 4.) wünschenswerth erscheint, indem der Gang des (§.) selbst nur dem Geübteren hinlängliche Befriedigung gewähren dürfte. In den unmittelbar folgenden Beispielen ist dies ausgeführt zu sehen.

Anmerkung 2. Hat man vorher bloß rechtwinkliche Coordinaten-Axen gehabt, so kann man zwei Paare neuer Coordinaten-Axen annehmen, beide Paare schiefwinklich; die rechtwinklichen Coordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes M, durch x' und y' und die erstern schiefwinklichen desselben Punktes durch x und y, die zweiten schiefwinklichen Coordinaten-Werthe desselben Punktes dagegen durch t und u vorstellen, und man wird dann, nach (§. 53.) oder direkt nach (§. $44\frac{1}{2}$.) verfahrend, zwei Gleichungen sich verschaffen, zwischen x', y', x und y, und dann noch zwei Gleichungen zwischen x', y', t und u, zuletzt aber aus diesen 4 Gleichungen x' und y' eliminiren können, so daß zwei Gleichungen übrig bleiben, zwischen x, y, t und u, welches dann diejenigen sind, die erhalten werden, wenn man von einem schiefwinklichen Coordinaten-System zu einem andern schiefwinklichen übergeht.

Aber eben so gut kann man von einem schiefwinklichen System zu einem rechtwinklichen, und von diesem wieder zu einem zweiten schiefwinklichen Coordinatensystem übergehen.

Ferner kann man, direkt nach (§. $44\frac{1}{2}$.) verfahrend von einem rechtwinklichen System zu einem andern rechtwinklichen System übergehen, bloß die Längen der Perpendikel, wie solche (§. 42.) gefunden sind, zu Hilfe nehmend.

Anmerkung 3. In den speziellen Anwendungen dieser Sätze kann es sehr häufig sich treffen, daß die neuen Axen nicht durch Gleichungen, sondern trigonometrisch oder sonst wie gegeben sind. In solchem Falle müßte man die Gleichungen der Axen aus den gegebenen Stücken erst finden, wie solches in den Beispielen zu (§. 23.) besonders zu sehen ist, um die Werthe von a_1, a_2, b_1, b_2, α_1 und α_2, welche in den Formeln des (§. 52.) vorkommen, zu erhalten.

Aber auch in allen diesen Fällen könnte man den Weg des (§. 44½.) direkt verfolgen, und so direkt zum Endresultat gelangen.

Wir wollen alles Specielle in nachstehenden Beispielen noch näher zu erörtern versuchen.

Beispiel 1. Es sind (Fig. 22.) X′AX und Y′AY alte Axen, welche in ihrer ersten Region den Winkel $XAY = \varphi$ bilden. Ferner ist Z′AZ eine neue Ordinaten-Axe, welche durch den Anfangs-Punkt A der alten Axen hindurchgeht und durch die Gleichung $y_2 = a_2 . x_2$ gegeben ist (wo also a_2 positiv ist, für diesen speziellen Fall der Fig. 22.). Für einen Punkt M in derselben Ebene seyen x, y die alten und x′, z die neuen Coordinaten-Werthe. Man soll die beiden Gleichungen auffinden, welche zwischen x, y und x′, z statt finden werden.

1) Lösen wir diese Aufgabe zuerst direkt nach Anweisung des (§. 44½.). Es ist nehmlich die Gleichung der durch M gedachten mit Z′AZ parallelen (unendlichen geraden Linie) MQ, wenn x_4 und y_4 die alten Coordinaten-Werthe ihrer einzelnen Punkte vorstellen:

$$y_4 - y = a_2 . (x_4 - x).$$

Die Gleichung der Linie X′AX, wenn x_1 und y_1 die alten Coordinaten-Werthe ihrer einzelnen Punkte sind, ist:

$$y_1 = 0 . x_1 + 0 \quad \text{d. h.} \quad y_1 = 0.$$

Also die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes Q nach (§. 30.), weil hier $a_1 = b_1 = 0$ und $b_2 = y - a_2 . x$ ist,

$$AQ = x - \frac{1}{a_2} . y,$$

und Null der Ordinaten-Werth; *) demnach die Entfernung MQ nach (§. 14.):

---

*) Ohne (§. 30.) anzuwenden, fiel in die Augen, daß der Ordinaten-Werth von Q Null ist. Und den Abscissen-Werth AQ fand man dann

$$MQ = y \cdot \sqrt{\frac{1}{a_2^2} + 1 + 2 \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \cos\varphi} =$$

$$= \frac{y}{a_2} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \cdot \cos\varphi},$$

wo für den Fall der (Fig. 22.), weil y, a_2 und MQ positiv sind, auch

$$\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \cdot \cos\varphi}$$

positiv seyn muß.

Da nun $AQ = x - \frac{1}{a_2} \cdot y$ bereits bekannt ist, und außerdem für den speciellen Fall der (Fig. 22.):

$AQ = x'$ und $QM = z$ ist,

so hat man die gesuchten Gleichungen:

$$x' = x = \frac{1}{a_2} \cdot y,$$

$$z = \frac{y}{a_2} \cdot \alpha_2 = \frac{\alpha_2}{a_2} \cdot y,$$

wenn α_2 die Wurzel $\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2^2 \cdot \cos\varphi}$

und zwar für den gegenwärtigen speciellen Fall, ihren positiven Werth vorstellt.

Aus diesen Gleichungen findet sich aber noch, wenn man sie umkehrt, und nach x und y auflöst:

$$x = x' + \frac{1}{a_2} \cdot z$$

und $$y = \frac{a_2}{\alpha_2} \cdot z$$

Und diese Resultate sind dieselben, wie solche (§. 54. n. 2.) für dieselbe Aufgabe und unter denselben Voraussetzungen gefunden worden, nur daß dort die neuen Coordinaten-Werthe durch t und u, hier dagegen durch x' und z vorgestellt sind. — Doch liegt noch ein Unterschied darin, daß wir hier einen speciellen Punkt M angenommen hatten, daher für diesen Punkt, namentlich in Bezug auf AQ, Coordinaten-Werth und Coordinaten-Maaß mit einander verwechseln konnten, so daß die hier gefundenen

---

auch unmittelbar aus der Gleichung der MQ, nehmlich aus

$$y_4 - y = a_2 \cdot (x_4 - x),$$

indem man $y_4 = 0$ setzte und das zugehörige x_4 aus der Gleichung entwickelte.

Resultate noch einen Zweifel zurücklassen müssen, ob für jeden anders angenommenen Punkt M (unten, oben, rechts oder links) dieselben Resultate sich würden ergeben haben. Hat man sich dagegen nach (§. 54.) auf dem systematischen Wege von der allgemeinen Gültigkeit der Resultate überzeugt, so ist der gegenwärtige recht brauchbar, um dieselben wieder zu finden.

2) Wollte man für diese specielle Aufgabe und für einen beliebig gegebenen Punkt M ein für sich stehendes, von den frühern Aufgaben (§. §. 45., 51—54.) ganz unabhängiges, und doch ganz allgemeingültiges Resultat erzielen, so mußte man diese specielle Aufgabe ganz so behandeln wie (§. 45.) die allgemeinere behandelt worden ist, d. h. keinen bestimmten Punkt M in der Figur annehmen, sondern einen beliebigen Punkt M sich denken, der in jeder der 4 Regionen oder in den Axen selbst liegen mag, MR parallel mit der Abscissen-Axe gelegt denken, bis sie die neue Ordinaten-Axe in R schneidet, dann nicht blos die Gleichung für die unendliche gerade Linie MQ, sondern auch die für (die unendliche Gerade) MR finden (letztere ist $y_3 - y = 0.(x_3 - x)$ d. h. $y_3 - y = 0$), dann aus den Gleichungen für die unendlichen Linien AQ und MQ, nehmlich aus $y_1 = 0.x_1$ und $y_4 - y = a_2.(x_4 - x)$ (nach §. 30.) die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes Q; ferner aus den Gleichungen der unendlichen Linien AZ und MR, nehmlich aus $y_2 = a_2.x_2$ und $y_3 - y = 0.(x_3 - x)$ oder $y_3 - y = 0$, die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes R (jedesmal nach §. 30.); eben so aus den bekannten Coordinaten-Werthen der Punkte A, Q und R, nach (§. 14.), die Entfernungen AQ und AR entwickeln, als die Coordinaten des Punktes M; zuletzt solche $= \pm x'$ und $= \pm z$ setzen, je nachdem eine der 4 Regionen der neuen Axen als die der positiven neuen Coordinaten-Werthe genommen wird, wie solches im (§. 45.) näher auseinandergesetzt ist, und für den gegenwärtigen speciellen Fall wiederholt werden müßte.

3) Wollte man ferner diese specielle Aufgabe bloß durch Anwendung der (§. 54. n. 2.) lösen, so hätte man nur

statt der dortigen	t,	u,
jetzt zu setzen beziehlich	x′,	z,

und für diese (Fig. 22.), das dortige $\alpha_1 = +1$, also die dortigen ersten Resultate zu nehmen, während $\alpha_2 = +\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.\cos\varphi}$.

Für die (Fig. 23.) dagegen, wenn wiederum die positive Seite und die positive Richtung der Abscissen-Axe bleiben und die neue Ordinaten-Axe Z′AZ durch $y_2 = a_2.x$ gegeben sein soll, ist a_2 negativ, daher das dortige α_2 negativ, so daß man zwar noch dieselbe Gleichungen hat, nehmlich:

$$x' = x - \frac{1}{a_2}.y \quad \text{und} \quad z = \frac{\alpha_2}{a_2}.y,$$

so wie $$x = x' + \frac{1}{\alpha_2}.z \quad \text{und} \quad y = \frac{a_2}{\alpha_2}.z,$$

nur daß jetzt α_2 den negativen Werth der Wurzel:

$$\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$$ bedeutet.

4) Wäre die neue Ordinaten-Axe Z'AZ nicht durch eine Gleichung, sondern nur durch den Winkel $ZAX = \psi$ gegeben, so müßte man, sollte die Auflösung in dem bisher verfolgten Sinne statt finden, die Gleichung für diese neue Axe Z'AZ erst finden. Diese Gleichung ist aber nach (§. 25.):

$$y = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} . x,$$

sowohl für den Fall der (Fig. 22.) als auch für den der (Fig. 23.), nur daß im ersten Fall $\psi < \varphi$, also $\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}$ positiv, im andern Fall dagegen $\psi > \varphi$, also $\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}$ negativ ist. Da nun demgemäß $a_2 = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}$ ist, so erhält man auf irgend einem der vorhergehenden Wege (1—3.), weil jetzt

$$\alpha_2 = \pm\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$$

$$= \pm\sqrt{1 + \frac{\sin^2\psi}{\sin^2(\varphi-\psi)} + 2\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}\cos\varphi}$$

$$= \pm\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}$$ *) ist,

$$x' = x - \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi}.y; \qquad z = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.y;$$

oder $$x = x' + \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi}.z \quad \text{und} \quad y = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.z,$$

---

*) Es ist nehmlich

$$\sin^2\psi + \sin^2(\varphi-\psi) + 2\sin\psi.\cos\varphi.\sin(\varphi-\psi) = \sin^2\varphi,$$

wie sich bald findet, wenn man die beiden letzten Glieder auf der linken Seite so schreibt:

$\sin(\varphi-\psi)[\sin(\varphi-\psi) + 2\sin\psi.\cos\varphi]$ d. h. $\sin(\varphi-\psi).\sin(\varphi+\psi)$;

und weil das letztere wiederum $= \sin^2\varphi - \sin^2\psi$ ist.

mag übrigens $\psi < \varphi$ seyn, wo α_2 ihren positiven Werth $+\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}$, oder $\psi > \varphi$ seyn; in so ferne dann nach der Auflösung (3.) α_2 ihren negativen Werth vorstellt, also wiederum $+\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}$; wenn nur immer die positive Seite und auch die positive Richtung der Abscissen-Axe im neuen System so beibehalten wird, wie solche im alten System angenommen war.

Dasselbe kann man aber für diese spezielle Aufgabe, und wenn man sich auf den Punkt M beschränkt, welcher (Fig. 22. oder 23.) in der ersten Region der alten, und zugleich in der ersten Region der neuen Coordinaten-Axen liegt, direkt aus der Figur ableiten. Man hat nehmlich im Dreieck MPQ:

(♂.)... $MP : \sin MQP = MQ : \sin MPQ = PQ : \sin PMQ.$

Nun ist aber (Fig. 22.) W. $MQP = \psi$, W. $MPQ = 180° - \varphi$ und W. $PMQ = \varphi - \psi$; ferner $MQ = z$, $MP = y$ und $QP = x - x'$; also, wenn man diese Werthe in (♂.) substituirt:

((.)... $y : \sin\psi = z : \sin\varphi = x - x' : \sin(\varphi - \psi)$.

In (Fig. 23.) dagegen ist
W. $MQP = 180° - \psi$, W. $MPQ = \varphi$ und W. $PMQ = \psi - \varphi$;
ferner $MQ = z$, $MP = y$ und $PQ = x' - x$;
also wenn man diese Werthe in (♂.) substituirt:

$y : \sin\psi = z : \sin\varphi = x' - x : \sin(\psi - \varphi)$,

welche Doppelgleichung leicht auf die ((.) zurückgebracht wird. — Löst man aber die zwei Gleichungen ((.) einmal nach x' und z, ein andermal nach x und y auf, so erhält man die kurz vorher bereits gefundenen Resultate wieder.

5) Der einfachste Fall derselben Aufgabe ist der, wo die alten Axen rechtwinklich sind, wo also $\varphi = 90°$ und $\cos\varphi = 0$, so wie $\sin\varphi = 1$ ist. Mag nun die neue Axe Z'AZ durch eine Gleichung $y_2 = a \,.\, x_2$, oder durch den Winkel $ZAX = \psi$ gegeben seyn, im letztern Falle aber die Gleichung für die Linie Z'AZ erst entwickelt werden, nehmlich $y_2 = tg\,\psi \,.\, x_2$, so daß $a_2 = tg\,\psi$ ist, so werden die Auflösungs-Arten (1—4.) allemal sogleich die Resultate für den gegenwärtigen Fall mit liefern.

In diesem einfachsten Falle kann man jedoch dieselben Resultate noch kürzer aus der Figur ableiten. Das Dreieck MPQ ist nehmlich nun bei P rechtwinklich, daher sogleich

$MP = MQ \,.\, \sin MQP$ oder $y = z \,.\, \sin\psi$
und $QP = MQ \,.\, \sin PMQ$ oder $x - x' = z \,.\, \cos\psi$
d. h. $x = x' + z \,.\, \cos\psi$ und $y = z \,.\, \sin\psi$;

und daraus wiederum

$$x' = x - cotg\,\psi \,.\, y \qquad \text{und} \qquad z = \frac{y}{sin\,\psi}.$$

Note. Man darf jedoch nicht übersehen, daß alle letzteren direkten Ableitungen aus der Figur wohl praktisch bequem und deshalb brauchbar seyn können, daß sie aber nicht geeignet sind, die vollkommene Ueberzeugung zu geben, daß die für diesen speciellen Fall der Figur erhaltenen Resultate, wirklich für jeden andern Punkt M, in jeder der Regionen, eben so gelten müssen; wenn nicht diese Ueberzeugung aus dem, in den (§. §.) des Textes betretenen systematischen und jedesmal alle Fälle umfassenden Gange, hervorgegangen ist.

Beispiel II. Es seyen wiederum X′AX und Y′AY (Fig. 24.) Axen, welche in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander machen. Eine neue Abscissen-Axe U′AU, welche durch den Anfangspunkt A der Coordinaten hindurchgeht, ist durch die Gleichung $y_1 = a_1 . x_1$ gegeben, und die alte Ordinaten-Axe soll bleiben. Von einem beliebigen Punkt M sind die alten Coordinaten-Werthe (AP und PM) durch x und y, die neuen dagegen (AQ und MQ) durch x′ und y′ vorgestellt. Die Gleichungen zwischen x, y, x′ und y′ zu finden.

1) Die Gleichung für die unendliche gerade Linie MQ ist:

$y_4 - y = \frac{1}{0}(x_4 - x)$, nehmlich $x_4 - x = 0$. Die Coordinaten-Werthe ihres Durchschnittspunktes Q mit der U′AU d. h. mit der $y_1 = a_1 . x_1$ sind nach (§. 30.):

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \qquad \text{und} \qquad \frac{a_1 . b_2 - b_1 . a_2}{a_1 - a_2},$$

wo $a_2 = \frac{1}{0}$, $a_1 = a_1$, $b_2 = y - \frac{1}{0}x$ und $b_1 = 0$ ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist aber

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = \frac{y - \frac{1}{0} . x}{a_1 - \frac{1}{0}} = \frac{0 . y - 1 . x}{0 . a_1 - 1} = x,$$

und

$$\frac{a_1 . b_2 - b_1 . a_2}{a_1 - a_2} = \frac{a_1 . \left(y - \frac{1}{0} . x\right) - 1}{a_1 - \frac{1}{0}} = \frac{0 . a_1 . y - a_1 . x - 0 . 1}{0 . a_1 - 1} = a_1 . x \text{ *).}$$

*) Um nicht mit Nullen rechnen zu müssen, ist es Anfängern anzurathen, in solchem Falle zuerst $\frac{1}{p}$ zu nehmen, statt sogleich $\frac{1}{0}$, dann

Folglich ist nach (§. 14.), für diesen speciellen Fall auch nach (§. 12.), die Entfernung MQ

$$= \pm (y - a_1 . x),$$

nach der (Figur 24.) aber $MQ = +(y - a_1 . x)$, weil a_1 negativ, also $y - a_1 . x$ an sich schon positiv seyn wird. Weil aber $MQ = y'$, so hat man die Gleichung: $y' = y - a_1 . x$.

Ferner ist die Gleichung für die unendliche Linie MS, welche parallel mit der neuen Abscissen-Axe gedacht wird, $y_3 - y = a_1 . (x_3 - x)$, daher die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes S dieser Linie MS mit der Axe YAY', deren Gleichung durch $y_2 = \frac{1}{0} . x_2$ vorgestellt werden kann,

nach (§. 30.): 0 und $y - a_1 . x$,

so daß (in der Figur) $AS = MQ = y - a_1 . x$ wird, was jedoch für diesen speciellen Fall schon aus der Figur in die Augen fiel. Aus den nun bekannten Coordinaten-Werthen der Punkte S und M findet man aber nun nach (§. 14.) die Entfernung

$$MS = AQ = +x\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi},$$

d. h. $$x' = \alpha_1 . x,$$

wenn $\alpha_1 = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi}$ ist.

Man hat also gefunden:

$$x' = \alpha_1 . x \quad \text{und} \quad y' = y - a_1 . x.$$

Daraus $$x = \frac{1}{\alpha_1} . x' \quad \text{und} \quad y = y' + \frac{a_1}{\alpha_1} . x',$$

wenn man die positive Seite und die positive Richtung der Ordinaten-Axe beibehält, und dabei α_1 positiv nimmt.

2) Wäre die neue Axe U'AU (Fig. 24.) durch den Winkel $UAX = \psi$ gegeben, so wäre ihre Gleichung nach (§. §. 25. 26.):

$$y = -\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)} . x;$$

also dasmal $$a_1 = -\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)},$$ und daraus

---

aus den Ausdrücken das p überall im Nenner wegzuschaffen und nur zuletzt erst Null statt p zu schreiben.

Daß übrigens x und $a_1 . x$ die Coordinaten-Werthe von Q sind, fällt bei der bloßen Ansicht der Figur in die Augen und brauchte nicht erst durch Rechnung entwickelt zu werden.

$$a_1 = \sqrt{1 + \frac{\sin^2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)} - 2\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}.\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)};$$

daher nun aus (1.):

$$x' = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}.x \quad \text{und} \quad y' = y + \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}.x,$$

so wie auch

$$x = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\varphi}.x' \quad \text{und} \quad y = y' - \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.x'.$$

Wollte man diese Gleichungen rein trigonometrisch aus der Figur ableiten, so hätte man im $\triangle$MRS, $\mathfrak{W}$.MRS$=\varphi$, $\mathfrak{W}$.MSR$=180°-(\varphi+\psi)$, $\mathfrak{W}$. RMS$=\psi$, MR$=x$, MS$=x'$ und RS$=y'-y$, dabei aber

$$MR : \sin MSR = MS : \sin MRS = RS : \sin RMS,$$

d. h. $$x : \sin(\varphi+\psi) = x' : \sin\varphi = y' - y : \sin\psi,$$

und dies sind in der That die beiden eben gefundenen Gleichungen.

Wäre $\varphi=90°$ vorausgesetzt, so wäre das Dreieck MRS bei R rechtwinklich und daher dann $\mathfrak{W}$. MSR$=90°-\psi$, so wie auch

$$MR = MS.\cos\psi \quad \text{oder} \quad x = x'.\cos\psi,$$
$$SR = MS.\sin\psi \quad \text{oder} \quad y' - y = x'.\sin\psi,$$

welches die beiden Gleichungen für den gegenwärtigen Fall sind.

Die Bemerkung in der Note zum 1. Beispiel gilt auch hier wiederum.

Beispiel III. Es sind X′AX, Y′AY (Fig. 25.) die alten Axen, und Z′A$_1$Z eine neue Ordinaten-Axe gegeben durch den Winkel ZA$_1$X$=\psi$ und die Entfernung AA$_1$$=a$. Man soll zwischen den alten Coordinaten-Werthen x=AP, y=MP und den neuen x'=A$_1$Q und y'=A$_1$S=MQ, die Gleichungen finden.

1) Direkt aus der Figur. Es ist im Dreieck MPQ, MP$=y$, MQ$=y'$, PQ$=x+a-x'$, $\mathfrak{W}$. MQP$=\psi$, $\mathfrak{W}$. MPQ$=180°-\varphi$ und $\mathfrak{W}$. QMP$=(\varphi-\psi)$, dabei aber

$$MP : \sin MQP = MQ : \sin MPQ = PQ : \sin PMQ,$$

d. h. $$y : \sin\psi = y' : \sin\varphi = x - x' + a : \sin(\varphi-\psi),$$

woraus dann die beiden Gleichungen hervorgehen:

$$x = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi}.y' + x' - a,$$

$$y = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.y',$$

und auch umgekehrt:

$$x' = -\frac{sin\,(\varphi-\psi)}{sin\,\psi}.y + x + a,$$

$$y' = \frac{sin\,\varphi}{sin\,\psi}.y.$$

2) Aus (§. 54. n. 1.). Da $Z'A_1Z$ mit der Axe $X'AX$ den Winkel ψ bildet, und noch überdies durch den Punkt A_1, dessen Coordinaten-Werthe $-a$ und 0 sind hindurchgeht, so ist die Gleichung für diese Linie $Z'A_1Z$, wenn x_2 und y_2 ihre Coordinaten-Werthe vorstellen:

$$y_2 = \frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)}.(x_2 + a),$$

also durch die Gleichung (§. 54. n. 1.):

$$y_2 = a_2.x_2 + b_2$$

vorgestellt, so bald man

$$a_2 = \frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{a.sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)}$$

nimmt. Dann ist jedoch

$$\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{sin^2\,\psi}{sin^2\,(\varphi-\psi)} + 2\frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)}.cos\,\varphi} = \pm\frac{sin\,\varphi}{sin\,(\varphi-\psi)},$$

wo aber das (+) Zeichen genommen wird (nach §. 54. n. 1.), wenn die (Fig. 25.) gemeint ist und dabei die positive Seite und die positive Richtung der Abscissen-Axe beibehalten wird. Und setzt man nun statt a_2 und α_2 in (§. 54. n. 1.) diese Werthe, so wie x', y' statt t und u, so erhält man:

$$x' = -\frac{sin\,(\varphi-\psi)}{sin\,\psi}.y + x + a,$$

$$y' = \frac{sin\,\varphi}{sin\,\psi}.y,$$

oder

$$x = \frac{sin\,(\varphi-\psi)}{sin\,\varphi}.y' + x' - a,$$

und

$$y = \frac{sin\,\psi}{sin\,\varphi}.y',$$

wie solches vorher auch schon gefunden worden ist.

3) Sind die alten Coordinaten-Axen rechtwinklich, also $\varphi = 90°$, $cos\,\varphi = 0$, $sin\,\varphi = 1$, so reduciren sich diese Gleichungen auf

$$x' = -cotg\,\psi.y + x + a,$$

$$y' = \frac{1}{sin\,\psi}.y$$

und $$x = \cos\psi \cdot y' + x' - a,$$

$$y = \sin\psi \cdot y',$$

wie solches auch für diesen einfachsten Fall direkt aus der Figur in die Augen fällt.

Beispiel IV. Es ist alles wie im vorhergehenden Beispiel (III.) gegeben, nur daß $Z'A, Z$ die neue Abscissen-Axe werden, und die Ordinaten-Axe YAY' als solche beibehalten werden soll. Für den Punkt M ist $A'P' = x'$ und (unter der Voraussetzung, daß die positive Seite und auch die positive Richtung der Ordinaten-Axe YAY' beibehalten wird) $-P'M = y'$. Man soll zwischen den Coordinaten-Werthen x', y' und x, y, die Gleichungen finden.

1) Direkt aus der Figur (Fig. 25.). In den ähnlichen $\triangle\triangle A'SR$ und $MP'S$ hat man:

$$RS : MS = A'S : P'S = A'R : MP',$$

also auch $$RS + MS : A'S + P'S = MS : P'S,$$

d. h. $$MR : A'P' = MS : P'S = \sin MPS : \sin PMS,$$

oder $$x : x' = \sin(\varphi - \psi) : \sin\varphi,$$

also $$x = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin\varphi} \cdot x'.$$

Ferner ist $$AA' : AA_1 = \sin\psi : \sin(\varphi - \psi),$$

also $$AA' = \frac{a \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)},$$

woraus $$A'R = AR - AA' = y - \frac{a \cdot \sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}$$ folgt.

Auf diesem Wege findet sich aber noch RS, A'S, MS, P'S, MP', alles in x, y, a, ψ und φ ausgedrückt; und weil $MP' = -y'$ ist, auf diese Weise die zweite gesuchte Gleichung. Kürzer noch gelangt man jedoch zum Resultat, wenn man im $\triangle A_1PP'$ nimmt:

$$PP' : A_1P = \sin\psi : \sin(\varphi - \psi),$$

also, weil $A_1P = x + a$ ist,

$$PP' = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} \cdot (x + a)$$

und $$MP' = PP' - MP = -y + \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} \cdot (x + a);$$

mithin $$y' = y - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} \cdot (x + a),$$

Man hat also für dieses Beispiel gefunden:

$$x' = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}.x \quad \text{und} \quad y' = y - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.x - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.a,$$

so wie noch

$$x = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi}x' \quad \text{und} \quad y = y' + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.x' + \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}a,$$

wo das dritte Glied $\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.a$

nichts weiter ist, als die Linie AA′, welche auch durch b bezeichnet seyn könnte.

2) Direkte Auflösung nach (§. 44½.).

Es sind die Gleichungen für die Linien:

1.1) Z′A′Z..... $y_1 = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x_1+a)$,

2.2) Y′AY..... $y_2 = \frac{1}{0}.x_2$ d. h. $x_2 = 0 . y_2 = 0$.

3.3) MQQ′ ..... $y_3 - y = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x_3-x)$,

4.4) MP′P..... $y_4 - y = \frac{1}{0}.(x_4-x)$ d. h. $x_4 - x = 0$.

Also (nach §. 31.) die Coordinaten-Werthe der Punkte:

P′ (Durchschnitts-Punkt von 1.1. und 4.4.) x und $\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x+a)$,

Q (Durchschnitts-Punkt von 2.2. und 3.3.) $x - \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi}.y$ und 0,

A′ (Durchschnitts-Punkt von 1.1. und 2.2.) 0 und $\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.a$,

M (Durchschnitts-Punkt von 3.3. und 4.4.) x und y.

Folglich nach (§. 14.) die Entfernungen:

$$A'P' = \pm\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}.x,$$

$$MP' = \pm\left(y - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x+a)\right)$$

d. h. weil $A'P' = \pm x'$ und $MP' = \pm y'$ ist, *)

$$x' = \pm\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}.x$$

---

*) Hier ist absichtlich der Punkt M ganz beliebig links, rechts, oben oder unten gedacht und deshalb nichts aus der Figur abgeleitet.

und $$y' = \pm\left(y - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x+a)\right),$$

wo nur noch, nach der Annahme der positiven Seiten und Richtungen der neuen Axen, die (±) Zeichen näher ausgemittelt werden dürfen.

Nach der darüber gemachten Annahme sind aber in der für diesen speciellen Fall zu Grunde gelegten Figur, für jedes positive x, und für jedes positive y, welches größer als $\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x+a)$ ist, nothwendig auch x′ und y′ positiv; daher muß man von beiden Gleichungen die (+) Zeichen nehmen, und so ergeben sich dieselben Gleichungen, wie sie in der Auflösung (1.) bereits gefunden worden sind.

3) Auflösung nach (§. 54. n. 3.).

Da die Gleichung für die neue Abscissen-Axe Z′A′Z,

$$y_1 = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.(x+a)$$

ist,

so hat man hier

$$a_1 = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.a$$

und $$\alpha_1 = \pm\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)},$$

wo aber wegen Beibehaltung der positiven Richtung und der positiven Seite der Ordinaten-Axe, und weil a_1 jetzt positiv ist, das (+) Zeichen genommen werden muß, nach (§. 54. n. 3.). Demnach gehen die Gleichungen des (§. 54. n. 3.), wenn man x′ und y′ statt beziehlich t und u setzt, über in folgende:

$$x' = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}.x \quad \text{und} \quad y' = y - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.x - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.a,$$

welches wiederum die in den beiden vorhergehenden Auflösungen bereits gefundenen Resultate sind.

Beispiel V. Es sind X′AX und Y′AY rechtwinkliche Coordinaten-Axen (Fig. 26.); ferner U′AU und Z′AZ neue, ebenfalls rechtwinkliche Coordinaten-Axen, und zwar die neue Abscissen-Axe U′AU gegeben durch den Winkel UAX = ψ, welchen sie mit der alten Abscissen-Axe X′AX macht. Man soll für einen beliebigen Punkt M, dessen alte Coordinaten-Werthe x und y, dessen neue Coordinaten-Werthe dagegen u und z sind, die Gleichungen zwischen x, y, u und z auffinden.

1) Direkt aus der (Figur 26.).

Es ist $AP = x$, $PM = y$, $AQ = u$, $QM = z$, und

$$BM = \frac{MQ}{\cos BMQ} = \frac{z}{\cos \psi},$$

$$BP = AP \,.\, tg\, BAP = tg\, \psi \,.\, x,$$

also wenn man addirt:

$$BM + BP = MP = \frac{1}{\cos \psi} \,.\, z + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \,.\, x,$$

d. h. $$1.1)\quad y = \frac{1}{\cos \psi} \,.\, z + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \,.\, x.$$

Ferner ist

$$CM = \frac{MR}{\cos CMR} = \frac{x}{\cos \psi},$$

$$CS = AS \,.\, tg\, CAS = tg\, \psi \,.\, z,$$

also, wenn man addirt, weil $CM + CS = MS = u$ ist,

$$2.2)\quad u = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \,.\, z + \frac{1}{\cos \psi} \,.\, x.$$

Löst man die beiden Gleichungen (1. 1 und 2. 2) nach x und nach y auf, so erhält man:

$$x = -\sin \psi \,.\, z + \cos \psi \,.\, u$$

und

$$y = \cos \psi \,.\, z + \sin \psi \,.\, u.$$

Und löst man dieselben Gleichungen nach z und u auf, so ergibt sich:

$$u = \sin \psi \,.\, y + \cos \psi \,.\, x$$

und

$$z = \cos \psi \,.\, y - \sin \psi \,.\, x.$$

2) Direkt nach (§. $44\frac{1}{2}$.).

Es sind nach (§. 24. und §. 25.) die Gleichungen der Linien:

1.1) U′AU, $y_1 = tg\, \psi \,.\, x_1$,

2.2) Z′AZ, $y_2 = tg\,(90° + \psi) \,.\, x_2 = -\,cotg\, \psi \,.\, x_2$,

3.3) MS, $y_3 - y = tg\, \psi \,.\, (x_3 - x)$,

4.4) MQ, $y_4 - y = -\,cotg\, \psi \,.\, (x_4 - x)$.

Folglich nach (§. 30.) die Coordinaten-Werthe der Durchschnittspunkte:

A 0 und 0

Q (von 1.1 und 4.4), $\cos \psi \,.\, (y \,.\, \sin \psi + x \,.\, \cos \psi)$

und $\sin \psi \,.\, (y \,.\, \sin \psi + x \,.\, \cos \psi)$,

S (von 2.2 und 4.4), $-\sin \psi \,.\, (y \,.\, \cos \psi - x \,.\, \sin \psi)$

und $\cos \psi \,.\, (y \,.\, \cos \psi - x \,.\, \sin \psi)$.

Und demnach nach (§. 14.) die Entfernungen (d. h. dasmal die Perpendikel):

$$\text{AQ oder MS,} \quad = \pm (y \,.\, \sin\psi + x \,.\, \cos\psi)$$
$$\text{AS oder MQ,} \quad = \pm (y \,.\, \cos\psi - x \,.\, \sin\psi),$$

während $AQ = MS = \pm u$

und $AS = MQ = \pm z$

ist, und die (+ oder —) Zeichen nach der Annahme der ersten Region der neuen Axen (in der Auflösung (1.) war stillschweigend die Region ZAU als die erste genommen) noch näher bestimmt werden müssen.

Nimmt man nun ZAU als die erste Region der neuen Axen, so ist für jeden Punkt M in dem Raume YAU, sowohl x und y, als auch z und u, so wie auch $\sin\psi$ und $\cos\psi$ zugleich positiv, während aus der Betrachtung der Figur in die Augen fällt, daß $y \,.\, \cos\psi$ d. h. MN größer ist, als $x \,.\, \sin\psi$ d. h. DP oder QV. Daher ergeben sich dann genau wieder die frühern Resultate.

3) Auflösung nach (§. 45. oder §. 48. oder §. 50.).

Es ist die Gleichung für die neue Abscissen-Axe U′AU:

$$y_1 = tg\,\psi \,.\, x_1,$$

und die der neuen Ordinaten-Axe Z′AZ nach (38.):

$$y_2 = -\frac{1}{tg\,\psi} \,.\, x_2 = -\,cotg\,\psi \,.\, x_2;$$

also im (§. 45.) wenn der dortige Fall den gegenwärtigen in sich schließen soll:

$$\cos\varphi = 0, \quad \sin\varphi = 1,$$

$$a_1 = tg\,\psi, \quad \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \,.\, \cos\varphi} = \sec\psi,$$

$$a_2 = -\,cotg\,\psi, \quad \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \,.\, \cos\varphi} = cosec\,\psi;$$

und wenn man diese Werthe in die Endresultate des (§. 45.) setzt, so wie auch noch u und z statt x′ und y′, so erhält man für den gegenwärtigen speciellen Fall:

$$u = \sin\psi \,.\, y + \cos\psi \,.\, x \quad \text{und} \quad z = -\cos\psi \,.\, y + \sin\psi \,.\, x.$$

Weil aber ψ ein spitzer Winkel, also $\sec\psi$ und $cosec\,\psi$ positiv sind, so haben wir dasmal die beiden Wurzeln:

$$\sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \,.\, \cos\varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 \,.\, \cos\varphi}$$

positiv angenommen, also dem (§. §. 45 — 48.) gemäß die Region UAZ′ zur ersten der neuen Axen. Nimmt man daher wieder wie vorher, die Region UAZ zur ersten, so geht die hier eben positiv gewesene Richtung der Ordinaten-Axe in die negative über; also dann auch der vorher

$\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\\text{negative}\end{matrix}\right\}$ Ordinaten-Werth z jetzt in den $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\\text{positiven}\end{matrix}\right\}$ $-z$ über, so daß man dann statt der obigen zweiten Gleichung:

$$z = -\cos\psi \,.\, y + \sin\psi \,.\, x$$

jetzt

$$z = \cos\psi \,.\, y - \sin\psi \,.\, x$$

erhält, also dieselben Resultate, welche in den Auflösungen (1. und 2.) bereits erhalten worden sind.

Beispiel VI. Es sind X′AX und Y′AY zwei rechtwinkliche Coordinaten-Axen, und der Punkt A′ gegeben (Fig. 27.) durch die senkrechten Entfernungen $AB = a$ und $BA' = b$. Durch diesen Punkt A′, als neuen Anfangs-Punkt, ist für neue rechtwinkliche Coordinaten, die neue Abscissen-Axe U′AU gelegt, welche mit X′AX den Winkel ψ bildet. Man soll zwischen den alten Coordinaten-Werthen x und y und zwischen den neuen u und z, eines und desselben beliebigen Punktes M, die beiden existirenden Gleichungen angeben.

1) Direkte Auflösung aus der Figur.

Es ist $AP = x$, $PM = y$, $A'Q = u$, $QM = z$, $AB = a$,

$$A'B = b, \quad BC = \frac{b \,.\, \cos\psi}{\sin\psi}, \quad A'C = \frac{b}{\sin\psi},$$

$$AC = a - b \,.\, \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi}{\sin\psi},$$

$$CD = \frac{AC}{\cos\psi} = \frac{a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi}{\sin\psi \,.\, \cos\psi},$$

$$CP = AC + AP = \frac{a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi + x \,.\, \sin\psi}{\sin\psi},$$

$$CE = CP \,.\, \cos\psi = (a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi + x \,.\, \sin\psi) \,.\, \frac{\cos\psi}{\sin\psi},$$

$$QF = PE = CP \,.\, \sin\psi = a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi + x \,.\, \sin\psi,$$

$$MF = MP \,.\, \cos\psi = y \,.\, \cos\psi,$$

$$PF = EQ = MP \,.\, \sin\psi = y \,.\, \sin\psi,$$

$$QS = PR = MQ \,.\, \sin\psi = z \,.\, \sin\psi,$$

$$MS = MQ \,.\, \cos\psi = z \,.\, \cos\psi,$$

$$CR = CP + PR = \frac{a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi + x \,.\, \sin\psi + z \,.\, \sin^2\psi}{\sin\psi},$$

$$PS = QR = CR \,.\, tg\,\psi = \frac{a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi + x \,.\, \sin\psi + z \,.\, \sin^2\psi}{\cos\psi},$$

$$CQ = \frac{CR}{\cos\psi} = \frac{a \,.\, \sin\psi - b \,.\, \cos\psi + x \,.\, \sin\psi + z \,.\, \sin^2\psi}{\sin\psi \,.\, \cos\psi}.$$

Auch $SH = QK = A'Q \,.\, sin\,\psi = u \,.\, sin\,\psi,$
$PS = QR = u \,.\, sin\,\psi - b,$
$A'p = b \,.\, sin\,\psi, \quad pq = a \,.\, cos\,\psi,$
$A'q = b \,.\, sin\,\psi + a \,.\, cos\,\psi,$
$ar = qE = AP \,.\, cos\,\psi = x \,.\, cos\,\psi$
und $qQ = qE + EQ = x \,.\, cos\,\psi + y \,.\, sin\,\psi.$

Sind nun alle Linien (alle Entfernungen zwischen je zweien Punkten, wie sie in der Figur sich ergeben haben) durch die Buchstaben a, b, ψ, x, y, z, u, ausgedrückt, so darf man nur diese Werthe in die Gleichungen:

$MQ + QF = MF$ oder $MS + PS = MP,$
oder $CE + EQ = CQ,$ oder $A'Q = A'C + CQ,$ oder etc.

substituiren, und man wird die verlangten Gleichungen zwischen x, y, z und u haben. Namentlich liefert die Gleichung:

$MQ + QF = MF,$ diese andere:

1.1) $z + a \,.\, sin\,\psi - b \,.\, cos\,\psi \,.\, + x \,.\, sin\,\psi = y \,.\, cos\,\psi$

und die Gleichung $A'Q = A'C + CQ,$ diese andere:

$$u = \frac{b}{sin\,\psi} + \frac{a \,.\, sin\,\psi - b \,.\, cos\,\psi + x \,.\, sin\,\psi + z \,.\, sin^2\,\psi}{sin\,\psi \,.\, cos\,\psi}$$

d. h. 2.2) $u \,.\, cos\,\psi = a + x + z \,.\, sin\,\psi,$

so daß man hat

3.3) $x = -sin\,\psi \,.\, z + cos\,\psi \,.\, u - a$

und 4.4) $y = cos\,\psi \,.\, z + sin\,\psi \,.\, u - b,$

welchen letzteren Werth von y man dadurch erhalten hat, daß in (1.1.) für x der eben gefundene Werth gesetzt worden, obgleich man ihn unmittelbarer dadurch hätte erhalten können, daß man in der Gleichung:

$MP = MS + SP$

statt MP, MS und SP ihre vorhin angegebenen Werthe substituirte, und zwar statt PS den zuletzt gefundenen $u \,.\, sin\,\psi - b.$

Kehrt man die beiden Gleichungen (3.3 und 4.4) um und löst sie nach u und nach z auf so erhält man noch

5.5) $u = sin\,\psi \,.\, y + cos\,\psi \,.\, x + (a \,.\, cos\,\psi + b \,.\, sin\,\psi)$

und 6.6) $z = cos\,\psi \,.\, y - sin\,\psi \,.\, x + (a \,.\, sin\,\psi + b \,.\, cos\,\psi),$

welche Gleichungen jedoch auch direkt aus denen andern

$A'Q = A'q + qQ$ und $MQ = MF - FQ$

hervorgegangen wären, wenn man für die hier vorkommenden Entfernungen, ihre oben ausgemittelten Werthe substituirt hätte. Dabei ist hier, dadurch daß man $A'Q = u$ und nicht $= -u,$ ferner $QM = z$ und nicht $= -z$ genommen hat, stillschweigend die Region UA'Z zur ersten Region der neuen Axen genommen worden.

2.) Auflösung nach (§. §. 51. und 52.).

Es ist die Gleichung für die neue Abscissen-Axe U′A′U, weil —a und —b die Coordinaten-Werthe des Punktes A′ sind, nach (§. §. 24—33.):

$$y_1 + b = tg\,\psi . (x_1 + a);$$

dagegen die Gleichung für die neue Ordinaten-Axe Z′A′Z nach (§. §. 37. 38.):

$$y_2 + b = -\,cotg\,\psi . (x_2 + a).$$

Soll daher die Aufgabe des (§. 51.) die jetzige als einen speciellen Fall in sich enthalten, so daß die Endresultate ihrer Auflösung (§. 52.) zugleich die Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe enthalten oder vorstellen, so muß nicht blos $\varphi = 90°$, $cos\,\varphi = 0$, $sin\,\varphi = 1$, sondern es müssen auch die dortigen a_1, b_1, a_2, b_2, α_1, α_2 so genommen werden, daß

$$a_1 = tg\,\psi, \qquad b_1 = -b + a . tg\,\psi,$$
$$a_2 = -\,cotg\,\psi, \qquad b_2 = -b - a . cotg\,\psi,$$
$$\alpha_1 = \sqrt{1 + a_1^2} = sec\,\psi,$$
$$\alpha_2 = \sqrt{1 + a_2^2} = cosec\,\psi$$

wird, während, was dort t vorstellt, hier durch u, was aber dort u repräsentirt, hier durch z vorgestellt wird. Substituirt man aber diese Werthe in die Resultate des (§. 52.) so erhält man für den gegenwärtigen Fall, weil

$$\frac{sec\,\psi}{tg\,\psi + cotg\,\psi} = sin\,\psi \quad \text{und} \quad \frac{cosec\,\psi}{tg\,\psi + cotg\,\psi} = cos\,\psi \quad \text{ist,}$$

1.1) $u = sin\,\psi . y + cos\,\psi . x + (a . cos\,\psi + b . sin\,\psi)$

und 2.2) $z = -\,[cos\,\psi . y - sin\,\psi . x + (-\,a . sin\,\psi + b . cos\,\psi)]$,

welches die beiden verlangten Gleichungen sind, jedoch unter der Voraussetzung, die dort gemacht worden war, daß UA′Z′ zur ersten Region der neuen Axen genommen worden ist. Nimmt man demnach UA′Z als erste Region, so gehen die Ordinaten-Werthe in ihre entgegesetzten über, z in —z und die Gleichung (2.2) wird dann genau, wie sie vorher schon gefunden worden ist.

3) Würde in diesem Beispiel alles unverändert gelassen, nur die (Figur 28.) zu Grunde gelegt, und der Winkel $U'CX = \psi$ genommen, so würde die erste Auflösung direkt aus der Figur auf ähnlichem Wege bewürkt werden können, dadurch nehmlich, daß man die Entfernung je zweier Punkte in ψ, a, b, x, y, u, z trigonometrisch ausdrückt, und dann eine und dieselbe Linie (Entfernung) entweder als eine Summe oder als eine Differenz zweier andern, doppelt ausgedrückt erhält.

Was jedoch die zweite Auflösung betrifft, so bleiben die Gleichungen für die Axen U′A′U und Z′A′Z nur dann so, wie sie daselbst angege-

ben stehen, wenn unter dem dortigen ψ, der Winkel UCX verstanden würde, der jetzt, wo $U'CX = \psi$ genommen ist, durch $180° - \psi$ vorgestellt wird; also bleiben jene Gleichungen für die Axen, und demnach alles was daraus gefolgert worden, nur dann gültig, wenn, wo ψ steht, jetzt durchaus $180° - \psi$ gesetzt wird. Weil aber $sin\,(180° - \psi) = sin\,\psi$ und nur $cos\,(180° - \psi) = -\,cos\,\psi$ ist, so bleiben die Endresultate noch richtig, wenn man $sin\,\psi$ stehen läßt, aber alle Glieder, die mit $cos\,\psi$ afficirt sind, mit dem entgegengesetzten Zeichen versieht.

Die nun entstehenden Gleichungen (aus 1.1 und 2.2) der zweiten Auflösung abgeleitet, wie solches eben beschrieben worden, sind daher jetzt:

$$u = sin\,\psi\,.\,y - cos\,\psi\,.\,x + (-a\,.\,cos\,\psi + b\,.\,sin\,\psi)$$

und $$z = cos\,\psi\,.\,y + sin\,\psi\,.\,x + (\;\;a\,.\,sin\,\psi + b\,.\,cos\,\psi),$$

während jedoch $\alpha_1 = sec\,(180° - \psi)$ also jetzt negativ, dagegen $\alpha_2 = cosec\,(180° - \psi)$ noch immer positiv ist, so daß nach den (§. §. 48. 51. und 52.) nicht ZA′U′, sondern ZA′U zur ersten Region der neuen Axen genommen ist, so daß, wenn man ZA′U′ zur ersten Region der neuen Axen nehmen wollte, dann die Abscissen-Werthe in ihre entgegengesetzten übergehen würden, also u in $-u$, daß also die Gleichungen selber dann diese Gestalt hätten:

$$u = -\,sin\,\psi\,.\,y + cos\,\psi\,.\,x + (a\,.\,cos\,\psi - b\,.\,sin\,\psi)$$

$$z = \;\;cos\,\psi\,.\,y + sin\,\psi\,.\,x + (a\,.\,sin\,\psi + b\,.\,cos\,\psi).$$

Vergleicht man endlich die hiesigen Gleichungen mit denen in der 2ten Auflösung für die (Fig. 27.) wo $UCX = \psi$ genommen war, so findet man bald, daß diese hiesigen letztern aus jenen hervorgegangen seyn würden, wenn man $-\psi$ statt ψ gesetzt hätte [weil $sin\,(-\psi) = -\,sin\,\psi$ und $cos\,(-\psi) = cos\,\psi$ ist], wenn man nur hier U′A′Z′ zur ersten Region der neuen Axen nimmt, damit unser hiesiges z noch in $-z$ übergehen müsse.

Dieses Zusammentreffen, daß, wenn die neue Abscissen-Axe U′A′U von der Lage in (Fig. 27.) zu der Lage (Fig. 28.) übergeht, statt ψ in den für (Fig. 27.) erhaltenen Resultaten, $-\psi$ gesetzt werden kann, um die Resultate für die (Fig. 28.) zu erhalten, ist daher nicht nur bloß zufällig, sondern nicht einmal vollständig, weil die neuen Resultate doch nur unter der Voraussetzung richtig sind, daß man sich erst eine der 4 Regionen der neuen Axen als die erste dazu passend herausgesucht habe.

Wenn man daher sagen wollte, der Winkel ψ, welcher in (Fig. 27.) ein positiver war, sey nun in (Fig. 28.) ein negativer geworden, so würde eine solche unrichtige Ansicht zwar scheinbar und in einzelnen, wenig zusammengesetzten Fällen, mittelst des Ueberganges von den Resultaten für die eine Figur, zu denen der andern, richtige Resultate liefern können, dagegen

jedesmal noch eine neue Untersuchung nöthig machen, nehmlich die: wie weit diese Richtigkeit der Resultate reicht, und wo sie aufhört, oder welche andere Aenderungen man noch vornehmen müsse, um diese Richtigkeit der Resultate allgemein zu machen. — Es scheint demnach in Bezug auf dieses Ableiten der Resultate verschiedener Fälle aus einem derselben, nicht gut ein anderer Weg betreten werden zu können, als derjenige, welcher im Iten Theile der Arithm. Algebr. u. Analysis (Kap. XIV.) nachgewiesen worden.

Beispiel VII. Dieselbe Aufgabe wie (VI.), nur daß die alten Axen den Winkel $YAX=\varphi$ und die neuen Axen den Winkel $Z'A'U=\varphi_1$ mit einander bilden sollen. (Fig. 29.).

1) Auflösung direkt aus der Figur.

Für den Punkt M in der (Fig. 29.) ist $AP=x$, $PM=y$, $A'Q=u$, $MQ=z$, $AB=a$, BA' (parallel mit YAY')$=b$, gegeben oder angenommen; und in den Dreiecken können zunächst alle Winkel in φ, φ_1 und ψ ausgedrückt werden. Es ist nehmlich

$\mathfrak{W}.\,CEP=\mathfrak{W}.\,MEQ=\mathfrak{W}.\,CDA=\mathfrak{W}.\,CA'B=\varphi-\psi$; $\mathfrak{W}.\,MQE=\varphi_1$;

$\mathfrak{W}.\,EMQ=180°-\varphi-\varphi_1+\psi$; u. s. w. Und wendet man nun den Satz an, daß in jedem Dreieck die Seiten sich verhalten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, so kann man auch die Entfernungen je zweier Punkte in a, b, x, y, z, u, φ, φ_1 und ψ ausdrücken; es wird nehmlich:

$$ME : \sin\varphi_1 = EQ : \sin(\varphi+\varphi_1-\psi) = MQ : \sin(\varphi-\psi);$$

also

$$ME = \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi-\psi)}\,.\,z, \qquad EQ = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin(\varphi-\psi)}\,.\,z.$$

Ferner ist

$$CA' : \sin\varphi = CB : \sin(\varphi-\psi) = A'B : \sin\psi,$$

also

$$CA' = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\,.\,b \quad \text{und} \quad CB = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi}\,.\,b.$$

Und daraus wieder

$$AC = CB - AB = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi}\,.\,b - a,$$

und

$$CP = AC + AP = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\psi}\,.\,b - a + x.$$

Dann ist weiter

$$CE : \sin\varphi = EP : \sin\psi = CP : \sin(\varphi-\psi),$$

also

$$CE = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot CP = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} \cdot b - \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot a + \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot x,$$

und $$EP = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot CP = b - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot a + \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot x.$$

Nun ist aber

$$A'Q = u = CE + EQ - CA',$$

d. h. 1.1) $$u = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot z + \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot x - \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot a.$$

Endlich ist

$$MP = ME + EP,$$

oder 2.2) $$y = \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot z + \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot x + b - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot a.$$

Und diese (1.1 und 2.2) sind die beiden verlangten Gleichungen, welche man nur noch nach u und nach z, oder nach x und nach y auflösen darf, um ihnen die in den vorhergehenden Beispielen beobachtete Form zu geben. Durch diese Auflösung erhält man aber z aus (2. 2) und dann u aus (1. 1), indem man diesen Werth von z in (1. 1) substituirt; und wenn man dabei berücksichtigt, daß

$$\sin\varphi \cdot \sin\varphi_1 - \sin(\varphi+\varphi_1-\psi) \cdot \sin\psi = \sin(\varphi-\psi) \cdot \sin(\varphi_1-\psi)$$

ist (nach E. 53. XI.) *), so ergibt sich:

3.3) $$u = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot y + \frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot x - \frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot b - \frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot a,$$

4.4) $$z = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot y - \frac{\sin\psi}{\sin\varphi_1} \cdot x - \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot b + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi_1} \cdot a.$$

Und diese Gleichungen nach x und nach y aufgelöst, geben wieder:

5.5) $$x = -\frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi} \cdot z + \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi} \cdot u + a,$$

6.6) $$y = \frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi} \cdot z + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} \cdot u + b$$ **).

---

*) Man verwandle nur nach (E. 53. XI.) die Produkte der Sinus in eine Differenz der Cosinus; und das Endresultat dann wieder in ein Produkt der Sinus.

**) Man konnte dieselben Resultate auch noch einfacher erhalten, wenn man noch A'H mit der Abscissen-Axe X'AX parallel zog. — Dann hatte man:

2) Auflösung nach (§. §. 51. und 52.).

Es ist nach (§. 25.) die Gleichung für die neue Abscissen-Axe U′A′U,

$$y_1 - b = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot (x_1 - a);$$

und die Gleichung für die neue Ordinaten-Axe, da sie mit X′AX den Winkel $180° - (\varphi_1 - \psi)$ bildet,

$$y_2 - b = -\frac{\sin(\varphi_1 - \psi)}{\sin(\varphi + \varphi_1 - \psi)} \cdot (x_2 - a).$$

Soll daher die Aufgabe des (§. 51.) zugleich die hiesige als einen speciellen Fall enthalten, so muß man die dortigen Buchstaben so denken, daß

$$a_1 = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}, \qquad b_1 = b - \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot a,$$

$$a_2 = -\frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}, \qquad b_2 = b + \frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)} \cdot a,$$

$A'H = x - a, \qquad MH = y - b;$

dabei $A'E : \sin\varphi = EH : \sin\psi = A'H : \sin(\varphi-\psi);$

also $A'E = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot (x-a)$

und $EH = \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot (x-a).$

Zuletzt ist $A'Q = A'E + EQ,$

und $MH = ME + EH;$

demnach $u = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot (x-a) + \frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot z$

und $y - b = \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot z + \frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} \cdot (x-a);$

woraus dann, wenn man nach u und nach z, oder nach x — a und y — b auflöst, hervorgeht:

$$u = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot (y-b) + \frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot (x-a),$$

$$z = \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi_1} \cdot (y-b) - \frac{\sin\psi}{\sin\varphi_1} \cdot (x-a),$$

und $x - a = -\frac{\sin(\varphi+\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi} \cdot z + \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin\varphi} \cdot u,$

$$y - b = \frac{\sin(\varphi_1-\psi)}{\sin\varphi} \cdot z + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} \cdot u,$$

welches die Gleichungen (3. 3, 4. 4, 5. 5 und 6. 6) sind.

demnach

$$\alpha_1 = +\sqrt{1+a_1^2+2a_1 . cos\,\varphi} = \frac{sin\,\varphi}{sin\,(\varphi-\psi)},$$

$$\alpha_2 = +\sqrt{1+a_2^2+2a_2 . cos\,\varphi} = \frac{sin\,\varphi}{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)} \text{ *)}$$

wird.

Und die Auflösungen des (§. 52.) verwandeln sich nun für diesen speciellen Fall, wenn man, wie dies seyn muß, u statt t und z statt u setzt, in folgende: **)

$$u = \frac{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)}{sin\,\varphi_1} . \left(y + \frac{sin\,(\varphi_1-\psi)}{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)} . x - b - \frac{sin\,(\varphi_1-\psi)}{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)} . a\right),$$

$$z = -\frac{sin\,(\varphi-\psi)}{sin\,\varphi_1} . \left(y - \frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)} . x - b + \frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)} . a\right),$$

wo nach den Voraussetzungen des (§. 51.) die Region UA′Z′ zur ersten genommen ist, so daß, wenn man, wie dies in der vorigen Auflösung stillschweigend, dadurch daß man $MQ = z$ (und nicht $= -z$) setzte, angenommen worden war, UA′Z zur ersten Region nimmt, z in $-z$ ver-

---

*) Es ist nehmlich

$$1+a_2^2+2a_2 . cos\,\varphi = 1 + \frac{sin^2\,(\varphi_1-\psi)}{sin^2\,(\varphi+\varphi_1-\psi)} - 2\,\frac{sin\,(\varphi_1-\psi)}{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)} . cos\,\varphi$$

$$= \frac{sin^2(\varphi+\varphi_1-\psi) - 2\,sin(\varphi_1-\psi) . sin(\varphi+\varphi_1-\psi) . cos\,\varphi + sin^2(\varphi_1-\psi)}{sin^2\,(\varphi+\varphi_1-\psi)}.$$

Dabei aber die beiden ersten Glieder im Zähler

$$= sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)\,[sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi) - 2\,sin\,(\varphi_1-\psi) . cos\,\varphi]$$
$$= sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi) . sin\,(\varphi-(\varphi_1-\psi))$$
$$= sin^2\varphi . cos^2\,(\varphi_1-\psi) - cos^2\,\varphi . sin^2\,(\varphi_1-\psi);$$

also obiger ganze Zähler $= sin^2\,\varphi$.

**) Weil nun

$$\frac{\alpha_1}{a_1-a_2} = \frac{sin\,\varphi}{sin\,(\varphi-\psi)} : \left(\frac{sin\,\psi}{sin\,(\varphi-\psi)} + \frac{sin\,(\varphi_1-\psi)}{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)}\right)$$

$$= \frac{sin\,\varphi . sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi)}{sin\,(\varphi+\varphi_1-\psi) . sin\,\psi + sin\,(\varphi-\psi) . sin\,(\varphi_1-\psi)}$$

ist, während dieser Nenner nach (E. 53. XI.) sich auf $sin\,\varphi . sin\,\varphi_1$ reducirt; und weil auf dieselbe Weise

$$\frac{\alpha_2}{a_2-a_1} = -\frac{\alpha_2}{a_1-a_2} = -\frac{sin\,(\varphi-\psi)}{sin\,\varphi_1}$$ wird.

wandelt werden muß, wodurch dann die hiesigen Resultate genau mit denen in der vorigen Auflösung erhaltenen übereinstimmen.

Eben so gibt der (§. 52.) noch weiter:

$$x = \frac{\sin(\varphi + \varphi_1 - \psi)}{\sin\varphi} \cdot z + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin\varphi} \cdot u + a$$

und $$y = -\frac{\sin(\varphi_1 - \psi)}{\sin\varphi} \cdot z + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} \cdot u + b,$$

wo man nur $-z$ statt z schreiben darf, wenn, wie in der Auflösung (1.) angenommen worden, UA′Z die erste Region der neuen Axen seyn soll.

Note 1. Man bemerke noch, daß diese Aufgabe wiederum die des vorhergehenden Beispiels in sich schließt, und daß also auch wiederum die Auflösung des vorigen Beispiels (VI.) in der jetzigen enthalten ist, und aus dieser letztern hervorgeht, wenn $\varphi = \varphi_1 = 90°$ gesetzt wird, also $\sin\varphi = \sin\varphi_1 = 1$ und $\sin(\varphi - \psi) = \sin(\varphi_1 - \psi) = \cos\psi$, so wie $\sin(\varphi + \varphi_1 - \psi) = \sin\psi$.

Doch wird in den Gleichungen selbst im (Beispiel VI.), für diesen speziellen Fall genommen, und den hier direkt gefundenen, noch der kleine Unterschied statt finden, daß, wo dort a und b ist, hier $-a$ und $-b$ stehen wird, oder wo dort $-a$, $-b$ steht, hier $+a$, $+b$ gefunden werden wird. Dies rührt nehmlich daher, daß die Resultate der (§. §. 51. 52.) gelten für den Fall, daß die Coordinaten-Werthe des neuen Anfangspunktes in Rechnung gebracht sind, während im (Beispiel VI. Fig. 27.) diese Coordinaten-Werthe $-a$ und $-b$ sind, hier aber (Fig. 29.), auch wenn man $\varphi = \varphi_1 = 90°$ nimmt, diese Coordinaten-Werthe $+a$ und $+b$ seyn werden.

Note 2. Diese Beispiele reichen hin anschaulich nachzuweisen, daß, man mag die Relationen zwischen den alten und den neuen Coordinaten-Werthen eines und desselben Punktes direkt aus der Figur finden, oder sie aus den im Texte entwickelten allgemeinen Resultaten entnehmen, doch jedesmal dieselben Resultate erhalten werden; — wie aber der Gang des Textes den großen Vortheil gewährt:

1) daß die Resultate subjektiv ganz allgemeingültig sind, daher dem consequenten Denker und Forscher völlige Befriedigung gewähren;

2) daß sie auch objektiv allgemeingültig sind und auf jeden einzelnen Fall mit gleicher Sicherheit und Bestimmtheit angewandt werden können, was bei Formeln, die aus der Figur abgeleitet, also eigentlich nur für diese Figur erwiesen sind, nicht so nothwendig der Fall ist, so daß sie in der That für jede andere specielle Figur derselben Aufgabe, eine in der erstern Auflösung nicht enthaltene,

auch nicht aus ihr durch eine allgemein anwendbare Hypotheſe abzunehmende Umänderung erleiden müſſen, welche nur dem Geübtern und dieſem nicht immer gleich ſicher, in die Augen leuchten wird.

§. 54½.

Bemerk. Betrachtet man die Gleichungen des (§. 51 .1—4.) zwiſchen den alten und neuen Coordinaten-Werthen eines und deſſelben Punktes, ſo bemerkt man leicht, daß ſie die Form haben:

1) $t = m_1 . y + n_1 . x + p_1$, 2) $u = m_2 . y + n_2 . x + p_2$

und

3) $x = m' . u + n' . t + p'$, 4) $y = m'' . u + n'' . t + p''$,

wo jedoch zwiſchen m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2 und m', n', p', m'', n'' und p'', die 6 Gleichungen:

$$m' = \frac{m_1}{m_1 . n_2 - m_2 . n_1}, \quad n' = -\frac{m_2}{m_1 . n_2 - m_2 . n_1}$$

$$p' = \frac{m_2 . p_1 - m_1 . p_2}{m_1 . n_2 - n_1 . m_2}, \quad m'' = -\frac{n_1}{m_1 . n_2 - n_2 . m_1},$$

$$n'' = \frac{n_2}{m_1 . n_2 - n_1 . m_2} \text{ und } p'' = \frac{n_1 . p_2 - n_2 . p_1}{m_1 . n_2 - n_1 . m_2} \text{ *)}$$

---

*) Man erhält dieſe Gleichungen, wenn man die Gleichungen (1. u. 2.) nach x und nach y auflöſt und die Reſultate mit den Gleichungen (3. und 4.) nach (Einl. 31.) vergleicht. —

Andere 6 Gleichungen erhält man, wenn man die Werthe von u und t aus (1. und 2.) in (3. und 4.) ſubſtituirt, die Gleichungen ordnet und dann (Einl. 31.) in Anwendung bringt.

Die dadurch entſtehenden Gleichungen ſind:

$$m' . m_2 + n' . m_1 = 0, \quad m' . n_2 + n' . n_1 = 1$$

und

$$m' . p_2 + n' . p_1 + p' = 0,$$

ferner

$$m'' . m_2 + n'' . m_1 = 1, \quad m'' . n_2 + n'' . n_1 = 0$$

und

$$m'' . p_2 + n'' . p_1 + p'' = 0.$$

Noch andere 6 Gleichungen würde man erhalten, wenn man die Werthe von x und y aus (3 und 4) in (1 und 2) ſubſtituiren und dann (Einl. §. 31.) in Anwendung bringen wollte. Und noch andere 6 Gleichungen ergeben ſich, wenn man die Gleichungen (3 und 4) nach t und nach u auflöſt und dieſe Werthe mit denen (in 1 und 2) ſtehenden, nach (Einl. 31.) vergleicht. — Jedes dieſer 4 Syſteme von 6 Gleichungen erſetzt aber jedes der übrigen.

statt finden, denen man noch sehr verschiedene Formen geben kann. Dabei sind die neuen Coordinaten-Axen gegeben durch die Gleichungen:

$$y_1 = a_1 . x_1 + b_1 \quad \text{und} \quad y_2 = a_2 . x_2 + b_2,$$

(welche sich auf die alten Axen beziehen), und die Coefficienten m_1, n_1, p_1, m_2, n_2. p_2 oder m', n', p', m'', n'' und p'' sind durch a_1, b_1, a_2 und b_2 völlig bestimmt und gegeben, nehmlich

$$m_1 = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2}, \; n_1 = \frac{\alpha_1 . a_2}{a_2 - a_1} \quad \text{und} \quad p_1 = \frac{\alpha_1 . b_2}{a_2 - a_1},$$

$$m_2 = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1}, \; n_2 = \frac{\alpha_2 . a_1}{a_1 - a_2} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{\alpha_2 . b_1}{a_1 - a_2},$$

oder

$$m' = \frac{1}{\alpha_2}, \quad n' = \frac{1}{\alpha_1}, \quad p' = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2},$$

$$m'' = \frac{a_2}{\alpha_2}, \quad n'' = \frac{a_1}{\alpha_1}, \quad p'' = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2},$$

während

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$$

ist, so daß diese Coefficienten immer wirklich gefunden werden können, die oben stehenden Gleichungen zwischen x, y, t und u also allemal statt finden, so oft wirklich zwei neue Axen gegeben sind.

Nun frägt es sich aber, ob auch umgekehrt, wenn x und y die Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes sind, ferner m', n', p', m'', n'' und p'' völlig beliebige reelle Werthe vorstellen und nun

$$x = m' . u + n' . t + p', \quad \text{so wie} \quad y = m'' . u + n'' . t + p''$$

gesetzt wird, — ob sich allemal zwei neue Axen werden dazu finden lassen, so daß die neuen Coordinaten-Werthe desselben Punktes statt t und statt u gesetzt, diesen letztern beiden Gleichungen

genügen. Um dies zu untersuchen, stellen wir diese Aufgabe in dem folgenden Paragraphen hin.

§. 55. Aufgabe.

Es sind x und y die Coordinaten-Werthe (auf gegebene Axen bezogen, die in ihrer ersten Region den Winkel φ mit einander bilden) eines beliebigen Punktes M in der Ebene. Man hat gesetzt:

1) $x = m'.u + n'.t + p'$ und 2) $y = m''.u + n''.t + p''$,

wo m', n', p', m'', n'', p'' beliebig reelle Zahlen vorstellen; und soll nun neue Axen finden, so daß die neuen Coordinaten-Werthe desselben Punktes M, statt t und statt u in die Gleichungen (1. und 2.) gesetzt, solche identisch machen.

Auflösung. Angenommen, die gesuchten neuen Axen existiren wirklich, so lassen sie sich durch die Gleichungen:

$$y_1 = a_1.x_1 + b_1 \quad \text{und} \quad y_2 = a_2.x_2 + b_2$$

darstellen, so daß nun a_1, a_2, b_1 und b_2 noch unbekannte gesuchte (reelle) Werthe vorstellen.

Es existiren aber dann nach (§. 51.) die Gleichungen:

$$3)\ x = \frac{1}{\alpha_2}.u + \frac{1}{\alpha_1}.t + \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

und

$$4)\ y = \frac{a_2}{\alpha_2}.u + \frac{a_1}{\alpha_1}.t + \frac{a_1.b_2 - a_2.b_1}{a_1 - a_2},$$

so daß man hätte, wenn man aus (1. und 3.) x, eben so aus (2. und 4.) y eliminirt,

$$5)\ m'.u + n'.t + p' = \frac{1}{\alpha_2}.u + \frac{1}{\alpha_1}.t + \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2},$$

$$6)\ m''.u + n''.t + p'' = \frac{a_2}{\alpha_2}.u + \frac{a_1}{\alpha_1}.t + \frac{a_1.b_2 - a_2.b_1}{a_1 - a_2}.$$

Da nun diese neuen Axen ihre Eigenschaft für jeden beliebigen Punkt (x, y) haben sollen, also auch für jeden beliebi-

gen Werth von t und von u, so können die Gleichungen (5. und 6.) nach (Einl. 31.) nur dann statt finden, wenn

$$\text{I. } m' = \frac{1}{\alpha_2}, \qquad \text{II. } n' = \frac{1}{\alpha_1}, \qquad \text{III. } p' = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2},$$

$$\text{IV. } m'' = \frac{a_2}{\alpha_2}, \qquad \text{V. } n'' = \frac{a_1}{\alpha_1}, \qquad \text{VI. } p'' = \frac{a_1 . b_2 - a_2 . b_1}{a_1 - a_2}$$

seyn wird, welche Gleichungen aber zur Bestimmung der 4 Unbekannten a_1, b_1, a_2 und b_2 dienen werden. Namentlich geben die Gleichungen (III. und VI.) ohne weiters b_1 und b_2, sobald nur a_1 und a_2 aus den Gleichungen (I. II. IV. und V.) bestimmt seyn werden. Weil man aber 4 Gleichungen hat, zur Bestimmung zweier Unbekannten a_1 und a_2, so bleiben, wenn man a_1 und a_2 eliminirt, jedesmal noch zwei Bedingungs-Gleichungen übrig, zwischen den 4 gegebenen Coefficienten m', n', m'', n''. Und so sieht man also, daß die Aufgabe selbst nicht möglich ist, also keine Auflösung zulassen kann, wenn nicht m', n', m'', n'' gerade so gegeben sind, daß diese beiden Bedingungs-Gleichungen in der That identisch werden.

Man findet aber aus den Gleichungen (I. II. IV. und V.)

$$\alpha_2 = \frac{1}{m'}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{n'}, \quad a_2 = \frac{m''}{m'}, \quad a_1 = \frac{n''}{n'};$$

und weil $$\alpha_2 = \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi}$$

und $$\alpha_1 = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 . \cos\varphi},$$

so geben die beiden erstern dieser Resultate, die Bedingungs-Gleichungen:

$$7) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{m''}{m'}\right)^2 + 2\frac{m''}{m'} . \cos\varphi} = \frac{1}{m'}$$

und $$8) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{n''}{n'}\right)^2 + 2\frac{n''}{n'} . \cos\varphi} = \frac{1}{n'}.$$

Diese Bedingungsgleichungen können nun erfüllt seyn, wenn m' und n' positiv sind, in so ferne die positiven Werthe der Wurzeln genommen werden; sie können aber auch erfüllt seyn, wenn m' oder n' oder beide negativ sind, in so ferne dann das (+ oder —) Zeichen der Wurzeln demgemäß genommen werden kann. Weil aber diese Wurzeln selbst nichts weiter als beziehlich die Werthe von α_2 und α_1 sind, von derem (+ oder —) Zeichen die Annahme der ersten Region der neuen Axen abhängt (nach §. §. 50. und 51.), so bestimmen sich nicht nur die neuen Axen ihrer Lage nach gegen die alten durch die Gleichungen:

$$y_1 = a_1 . x_1 + b_1 \quad \text{und} \quad y_2 = a_2 . x_2 + b_2 ,$$

sondern es wird auch die erste Region derselben sogleich festgesetzt *), so daß man keine andere der Regionen als die erste annehmen dürfte, wenn die neuen Coordinaten-Werthe t und u desselben beliebigen Punktes (x, y) den Gleichungen (1. und 2.) entsprechen sollen.

Ist endlich eine der Bedingungsgleichungen (7 und 8) nicht erfüllt, durch die gegebenen Werthe von m', n', m'' und n'', so ist es nicht möglich, solche Axen zu finden, wie sie gesucht werden.

Anmerkung 1. Man kann den beiden Bedingungsgleichungen:

$$1) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{m''}{m'}\right)^2 + 2 . \frac{m''}{m'} . \cos\varphi} = \frac{1}{m'}$$

und

$$2) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{n''}{n'}\right)^2 + 2 . \frac{n''}{n'} . \cos\varphi} = \frac{1}{n'} ,$$

*) Ist m' und n' zugleich positiv, so werden α_2 und α_1 zugleich positiv und die erste Region der neuen Axen ist dann diejenige, deren beide Schenkel sich auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche erstrecken (§. §. 50. 51. oder §. 45. seq.). Ist m' also auch α_2 negativ, so wird die entgegengesetzte Seite der neuen Abscissen-Axe zur positiven, und ist n' also auch α_1 negativ, so wird die entgegengesetzte Seite der neuen Ordinaren-Axe zur positiven genommen werden müssen.

noch folgende verschiedene Formen geben:

$$3)\ \sqrt{m'^2+m''^2+2m'.m''.\cos\varphi}=1,$$

$$4)\ \sqrt{n'^2+n''^2+2n'.n''.\cos\varphi}=1,$$

oder auch

$$5)\ m'^2+m''^2+2m'.m''.\cos\varphi=1$$

$$6)\ n'^2+n''^2+2n'.n''.\cos\varphi=1,$$

oder auch

$$7)\ \cos\varphi=\frac{1-m'^2-m''^2}{2m'.m''},$$

$$8)\ \cos\varphi=\frac{1-n'^2-n''^2}{2n'.n''},$$

oder noch

$$9)\ \frac{1-m'^2-m''^2}{m'.m''}=\frac{1-n'^2-n''^2}{n'.n''},$$

$$10)\ n'^2+n''^2-m'^2-m''^2=2(m'.m''-n'.n'')\cos\varphi.$$

Allein keines dieser letztern Paare ersetzt das erste Paar ganz. In (n.n. 3 4.) wo mit m', n' wegmultiplicirt ist, muß man von den Wurzeln links nothwendig die absoluten Werthe nehmen und man würde daher an diesen Gleichungen nicht mehr erkennen, welche (+ oder —) Zeichen α_1 und α_2 bekommen müssen, d. h. welche der 4 neuen Regionen zur ersten genommen werden muß, wenn das erstere Paar Gleichungen nicht vorhanden wäre. *)

---

*) In der That hätte man statt der Gleichung (1.) diese andere gehabt:

$$\sqrt{1+\left(\frac{m''}{m'}\right)^2+2\frac{m''}{m'}.\cos\varphi}=-\frac{1}{m'},$$

und nun links und rechts mit $-m'$ weg multiplicirt, so hätte man links den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen mit $(-m')^2$ d. h. mit m'^2 multipliciren müssen, und man hätte dann aus ihr genau wiederum die Gleichung (3) erhalten. Die Gleichung (3) repräsentirt daher außer der Bedingungsgleichung (1), noch eine zweite von ihr verschiedene. Dasselbe gilt nun natürlich auch von den folgenden Paaren (5 und 6, 7 und 8) der Bedingungsgleichungen.

Eben so repräsentirte jede der folgenden Gleichungen (5, 6 oder 7, 8.) jedesmal zwei verschiedene Bedingungen d. h. außer der in (1 oder 2.) ausgesprochenen Bedingung, noch eine zweite von ihr verschiedene, so daß eben deshalb eine Unbestimmtheit oder Zweideutigkeit eintritt, welche allein durch die Gleichungen (1 und 2.) gehoben werden kann, oder durch Zusatz-Bedingungen, welche aus diesen letztgenannten Gleichungen erst noch abgeleitet werden müssen.

Anmerkung 2. Man könnte auch den Winkel φ der alten Coordinaten-Axen unbestimmt lassen, und ihn so bestimmen, daß einer der beiden Bedingungen (7 und 8.) des (§.) genügt würde. Es würde sich zu diesem Ende ergeben:

$$\cos\varphi = \frac{1 - m'^2 - m''^2}{2m'.m''} = \frac{1 - n'^2 - n''^2}{2n'.n''};$$

so daß, wenn nur die Bedingungen der Gleichheit der beiden letztern Ausdrücke zur rechten erfüllt ist, dann $\cos\varphi$ diesen Ausdrücken gleich genommen werden kann, um auch die zweite Bedingung erfüllt zu sehen. — Allein man dürfte bei dieser Aufgabe nicht übersehen, daß $\cos\varphi$ allemal positv oder negativ, aber absolut genommen jedesmal $\leqq 1$ seyn muß; und es müßte olso der absolute Werth von $1 - m'^2 - m''^2$ kleiner seyn, als der absolute Werth von $2m'.m''$, wenn es möglich seyn soll, den Winkel φ der alten Axen so zu nehmen, daß nur noch der einzigen Bedingung:

$$\frac{1 - m'^2 - m''^2}{m'.m''} = \frac{1 - n'^2 - n''^2}{n'.n''}$$

genügt werden darf, um der Aufgabe des (§., 55.) durch eine mögliche und wirkliche Auflösung entsprochen zu sehen.

§. 56. Zusatz.

Und der Winkel ψ der neuen Axen in ihrer ersten Region, wenn den beiden Bedingungen (7 und 8.) des (§. 55.) genügt

ist, diese neuen Axen also den Forderungen der Aufgabe (§. 55.) entsprechend wirklich existiren, ist gegeben durch die Gleichung:

$$\cos\psi = \frac{1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2).\cos\varphi}{\alpha_1 . \alpha_2}$$

d. h.
$$\cos\psi = \frac{1 + \frac{n''}{n'} \cdot \frac{m''}{m'} + \left(\frac{n''}{n'} + \frac{m''}{m'}\right).\cos\varphi}{\frac{1}{n'} \cdot \frac{1}{m'}}$$

d. h. $$\cos\psi = m' . n' + m'' . n'' + (m' . n'' + m'' . n') . \cos\varphi.$$

Und dieser Winkel ist daher spitz, recht oder stumpf, je nachdem der Ausdruck rechts für $\cos\psi$, positiv, Null oder negativ seyn sollte.

§. 57. Zusatz.

Wären die alten Coordinaten-Axen rechtwinklich, also $\varphi = 90°$ und $\cos\varphi = 0$, so bleibt alles in der Auflösung des (§. 55.) unverändert, und nur die beiden Bedingungsgleichungen (7 und 8.) reduciren sich auf:

$$1) \sqrt{1 + \left(\frac{m''}{m'}\right)^2} = \frac{1}{m'}$$

und
$$2) \sqrt{1 + \left(\frac{n''}{n'}\right)^2} = \frac{1}{n'},$$

wofür man, wenn die erste Region der neuen Axen bereits bestimmt ist, diese andern Gleichungen:

$$3) \; m'^2 + m''^2 = 1$$

und
$$4) \; n'^2 + n''^2 = 1$$

setzen darf, welchen Bedingungen nicht genügt werden kann, wenn m' oder m'', n' oder n'', absolut genommen, größer wie 1 seyn sollte.

Und der Winkel ψ, welchen die neuen Axen in ihrer ersten Region mit einander bilden, ist nun gegeben durch die Gleichung:

$$5) \; \cos\psi = m' . n' + m'' . n''.$$

§. 58. Zusatz.

In diesem Falle, wo die alten Axen rechtwinklich sind, kann man sich zwei Winkel ε und ζ denken, so daß

1) $cos\,\varepsilon = n'$, 2) $sin\,\varepsilon = n''$

3) $cos\,\zeta = m'$, 4) $sin\,\zeta = m''$

wird; eben wegen der Gleichungen (§. 57. 3 und 4.), welchen genügt werden muß, wenn neue Axen, wie sie (§. 55.) verlangt worden sind, möglich seyn und wirklich existiren sollen.

Umgekehrt, so wie man diese Annahme für m', m'', n' und n'' macht, so ist den beiden Bedingungsgleichungen (§. 57. 3 und 4.) wirklich genügt und dann existiren auch allemal neue Axen, welche der Aufgabe (§. 55.) genügen, für den gegenwärtigen speciellen Fall.

Dann ist aber:

5) $a_1 = \frac{n''}{n'} = tg\,.\,\varepsilon$ und 6) $a_2 = \frac{m''}{m'} = tg\,\zeta$,

und die Gleichungen für die neuen Axen sind also:

$$y_1 = tg\,\varepsilon\,.\,x_1 + b_1 \quad \text{und} \quad y_2 = tg\,\zeta\,.\,x_2 + b_2.$$

Den (§.§. 24—27.) gemäß kann man daher statt ε und ζ die Winkel nehmen, welche die neuen Axen mit der alten Abscissen-Axe bilden (und zwar die Enden der neuen Axen, welche auf der positiven Seite der alten Abscissen-Axe liegen, mit der positiven Richtung der letztern).

Umgekehrt: sind ε und ζ die Winkel, welche die neuen Axen mit der alten Abscissen-Axe bilden, so wird, die alten Axen als rechtwinklich vorausgesetzt,

$$x = cos\,\zeta\,.\,u + cos\,\varepsilon\,.\,t + p',$$
$$y = sin\,\zeta\,.\,u + sin\,\varepsilon\,.\,t + p'',$$

während p' und p'' (weil für $u = t = 0$, $x = p'$ und $y = p''$ wird) die alten Coordinaten-Werthe des neuen Anfangs-Punktes sind.

Und dabei wird für den Winkel ψ die Gleichung (§. 57. n. 5.) übergehen in

$$cos\,\psi = cos\,\varepsilon\,.\,cos\,\zeta + sin\,\varepsilon\,.\,sin\,\zeta.$$

Anmerkung 1. Wenn die beiden Linien

$$y = a_1 x \quad \text{und} \quad y = a_2 x$$

zwischen den alten Axen in ihrer ersten Region liegen, wie (Fig. 30.), und ε', ζ' die Winkel sind, welche dieselben mit der Ordinaten-Axe bilden, so daß

$$\text{W. XAU} = \varepsilon, \quad \text{W. YAU} = \varepsilon', \quad \text{W. XAZ} = \zeta, \quad \text{W. YAZ} = \zeta'$$

ist, so hat man $\sin \varepsilon = \cos \varepsilon'$ und $\sin \zeta = \cos \zeta'$, und man erhält dann

$$\cos \psi = \cos \varepsilon . \cos \zeta + \cos \varepsilon' . \cos \zeta'.$$

Anmerkung 2. Sollen auch die neuen Axen rechte Winkel mit einander bilden, (wo aber (Fig. 30.) nicht mehr statt findet) so hat man noch $\psi = 90°$, $\cos \psi = 0$, also auch

$$\cos \varepsilon . \cos \zeta + \sin \varepsilon . \sin \zeta = 0,$$

oder
$$1 + tg\, \varepsilon . tg\, \zeta = 0,$$

oder
$$tg\, \zeta = - cotg\, \varepsilon,$$

d. h.
$$\zeta = 90° + \varepsilon,$$

mithin
$$\cos \zeta = - \sin \varepsilon,$$

und
$$\sin \zeta = \cos \varepsilon;$$

also dann auch

$$n' = \cos \varepsilon, \quad n'' = \sin \varepsilon, \quad m' = - \sin \varepsilon \quad \text{und} \quad m'' = \cos \varepsilon;$$

folglich auch

$$x = - \sin \varepsilon . u + \cos \varepsilon . t,$$
$$y = \cos \varepsilon . u + \sin \varepsilon . t,$$

wie solches mit dem, denselben Fall enthaltenden Beispiel (V. §. 54.) wiederum übereinstimmt.

§. 59. Zusatz.

Würde überhaupt in der Aufgabe des (§. 55.) zur ausdrücklichen Bedingung gemacht daß die neuen Axen einen gegebenen Winkel ψ mit einander bilden sollen, so hat man die 3 Bedingungsgleichungen zu erfüllen:

$$1) \sqrt{1 + \left(\frac{m''}{m'}\right)^2 + 2\frac{m''}{m'} . \cos \varphi} = \frac{1}{m'},$$

$$2)\ \sqrt{1+\left(\frac{n''}{n'}\right)^2+2\frac{n''}{n'}.\cos\varphi}=\frac{1}{n'}$$

und

$$3)\ \cos\psi=m'.n'+m''.n''+(m'.n''+m''.n').\cos\varphi.$$

Und diese 3 Bedingungen reduciren sich auf:

$$4)\ \sqrt{1+\left(\frac{m''}{m'}\right)^2}=\frac{1}{m'},$$

$$5)\ \sqrt{1+\left(\frac{n''}{n'}\right)^2}=\frac{1}{n'},$$

$$6)\ \cos\psi=m'.n'+m''.n'',$$

so oft das alte Coordinaten-Axensystem rechtwinklich war.

§. 60. Zusatz.

Sollen aber die neuen Axen rechtwinklich werden, so hat man noch $\cos\psi=0$, und dann sind die 3 Bedingungen:

$$1)\ \sqrt{1+\left(\frac{m''}{m'}\right)^2+2\frac{m''}{m'}.\cos\varphi}=\frac{1}{m'},$$

$$2)\ \sqrt{1+\left(\frac{n''}{n'}\right)^2+2\frac{n''}{n'}.\cos\varphi}=\frac{1}{n'},$$

$$3)\ 0=m'.m''+n'.n''+(m'.n''+m''.n').\cos\varphi$$

zu erfüllen, wenn die Aufgabe des (§. 55.) in der jetzigen Modifikation möglich seyn soll.

Und diese 3 Bedingungen reduciren sich auf:

$$4)\ \sqrt{1+\left(\frac{m''}{m'}\right)^2}=\frac{1}{m'};$$

$$5)\ \sqrt{1+\left(\frac{n''}{n'}\right)^2}=\frac{1}{n'};$$

$$6)\ 0=m'.m''+n'.n'',$$

so oft die alten Coordinaten-Axen ebenfalls rechtwinklich vorausgesetzt sind. (Vergl. Anmerk. 2. §. 58.).

Anmerkung. In jedem der Fälle dieses und des vorhergehenden Paragraphen ist also nur einer der 4 Werthe m', m'', n', n'' unbestimmt, die 3 übrigen aber sind durch die 3 Bedingungsgleichungen selbst bestimmt. Und auch für den unbestimmt gebliebenen dieser 4 Ausdrücke wird man nicht jeden möglichen Werth setzen dürfen, sondern nur solche, für welche aus diesen 3 Bedingungsgleichungen für die übrigen 3 der 4 Ausdrücke m', n', m'' und n'' reelle Werthe sich ergeben; wenn nehmlich neue Axen, den Bedingungen des (§. 55.) entsprechend, existiren sollen.

Dagegen können p' und p'' beliebig angenommen werden, und sind solche allemal, weil die Gleichungen (§. 55. 1. und 2.) für $t=u=0$, in $x=p'$ und $y=p''$ übergehen, die alten Coordinaten-Werthe des neuen Anfangspunktes.

§. 61. Zusatz.

Man konnte auch die Aufgabe des (§. 55.) so stellen, daß man neue Axen suchte, so daß, wenn x und y die alten, und t und u die neuen Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes in der Ebene sind, den Gleichungen

$$1)\quad t=m_1.y+n_1.x+p_1,$$

$$2)\quad u=m_2.y+n_2.x+p_2$$

genügt werde, während m_1, n_1, p_1, m_2, n_2 und p_2 beliebig und reell gegeben seyn sollen.

Man würde diese Aufgabe dann direkt nach (§. 55.) lösen können, indem man die gesuchten Axen als existirend annimmt, durch die Gleichungen:

$$y_1=a_1.x_1+b_1 \quad \text{und} \quad y_2=a_2.x_2+b_2$$

ausdrückt und nun die gegebenen Gleichungen (1. und 2.) mit denen des (§. 51. n.n. 1. und 2.) nehmlich:

$$3)\quad t=\frac{\alpha_1}{a_1-a_2}.(y-a_2.x-b_2)$$

und $$4)\ u = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1}.(y - a_1.x - b_1)$$

vergleicht. Und weil diese 4 Gleichungen nun für jeden Werth von x und y statt finden sollen, so würde man die 6 Gleichungen erhalten:

$$\text{I)}\ m_1 = \frac{\alpha_1}{a_1 - a_2}; \qquad \text{IV)}\ m_2 = \frac{\alpha_2}{a_2 - a_1};$$

$$\text{II)}\ n_1 = \frac{\alpha_1 . a_2}{a_2 - a_1}; \qquad \text{V)}\ n_2 = \frac{\alpha_2 . a_1}{a_1 - a_2};$$

$$\text{III)}\ p_1 = \frac{\alpha_1 . b_2}{a_2 - a_1}; \qquad \text{VI)}\ p_2 = \frac{\alpha_2 . b_1}{a_1 - a_2}.$$

Aus (III. und VI.) wird nun sogleich b_1 und b_2 gefunden, wenn a_1 und a_2 aus (I. II. IV. und V.) vorher entwickelt worden sind. Diese letzterwähnten Gleichungen geben aber:

$$a_2 = -\frac{n_1}{m_1} \quad \text{und} \quad a_1 = -\frac{n_2}{m_2}$$

und noch zwei Bedingungsgleichungen zwischen m_1, n_1, m_2 und n_2 selbst, welche erhalten werden wenn man in (I. u. IV.) statt α_1 und α_2 die Wurzeln setzt, welche sie vorstellen, dann aber statt a_2 und a_1 die eben gefundenen Werthe substituirt. Diese Bedingungsgleichungen sind:

$$5)\ m_1 . \left(\frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^2 - 2.\frac{n_2}{m_2}.\cos\varphi},$$

$$6)\ m_2 . \left(\frac{n_2}{m_2} - \frac{n_1}{m_1}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{n_1}{m_1}\right)^2 - 2.\frac{n_1}{m_1}.\cos\varphi},$$

wo die (+ oder —) Zeichen der Ausdrücke links, zu gleicher Zeit die (+ und —) Zeichen der Wurzeln rechts, d. h. der α_1 und α_2 seyn, also die Region der neuen Axen angeben werden nach (§. §. 50. 51.), welche als die erste angesehen werden muß.

Und der Winkel ψ der neuen Axen in ihrer ersten Region ist nun gegeben durch die Gleichung

$$\cos\psi = \frac{1 + \frac{n_1}{m_1}\cdot\frac{n_2}{m_2} - \left(\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}\right)\cos\varphi}{-m_1 . m_2 . \left(\frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2}\right)^2}$$

oder

$$7)\ \cos\psi = -\frac{m_1 . m_2 + n_1 . n_2 - (m_1 . n_2 + m_2 . n_1).\cos\varphi}{(m_1 . n_2 - m_2 . n_1)^2},$$

welche Gleichung noch als dritte Bedingung angesehen werden muß, so oft der Winkel ψ gegeben ist, (z. B. ein rechter seyn soll).

Anmerkung. Man konnte aber auch die jetzige Aufgabe auf die des (§. 55.) selbst zurückführen, indem man aus den Gleichungen

$t = m_1 . y + n_1 . x + p_1$ und $u = m_2 . y + n_2 . x + p_2$,

x und y in t und u ausgedrückt fand, (vergl. §. 54½.) und sonach die in (§. 55.) vorkommenden m', n', p', m'', n'', p'' durch die hier gegebenen m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2 ausdrückte, und die so gefundenen Werthe durchaus in der Auflösung des (§. 55.) sowohl, als auch in den folgenden (§. §.) statt m', n', m'', n'' selbst, substituirte.

§. 62. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung für eine gerade Linie MN, nehmlich:

$$1)\ y = a . x + b,$$

auf gegebene Axen bezogen, welche unter sich den Winkel φ machen, in ihrer ersten Region. Ferner sind neue Axen gegeben durch die Gleichungen:

$$2)\ y_1 = a_1 . x_1 + b_1 \quad \text{und} \quad 3)\ y_2 = a_2 . x_2 + b_2.$$

Man soll die Gleichung finden für dieselbe gerade Linie MN, zwischen den Coordinaten-Werthen t und u, welche sich auf diese neuen Axen und auf eine beliebig als die positive, angenommene Region derselben beziehen.

Auflösung. Für jeden Punkt der Ebene, also auch für jeden Punkt der geraden Linie MN, hat man zwischen den alten x, y, und den neuen Coordinaten-Werthen t, u, die Gleichungen (§. 51. n. n. 3. 4.) nehmlich:

$$4)\quad x = \frac{1}{\alpha_2}.u + \frac{1}{\alpha_1}.t + \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

und

$$5)\quad y = \frac{a_2}{\alpha_2}.u + \frac{a_1}{\alpha_1}.t + \frac{a_1.b_2 - a_2.b_1}{a_1 - a_2}.$$

Setzt man daher diese Werthe rechts statt y und x in die Gleichung (1.), so erhält man:

$$\frac{a_2 - a}{\alpha_2}.u + \frac{a_1 - a}{\alpha_1}.t + \frac{a_1.b_2 - a_2.b_1 - a(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} - b = 0$$

oder

$$6)\quad u = \frac{(a_1 - a).\alpha_2}{(a - a_2).\alpha_1}t + \frac{a_1.(b_2 - b) - a_2.(b_1 - b) - a.(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)(a - a_2)}.\alpha_2.$$

Und da die Gleichungen (1. 4. und 5.) für jeden Punkt der geraden Linie MN (seine alten Coordinaten-Werthe statt x und y, seine neuen statt t und u gesetzt) identisch werden müssen, so muß auch die Gleichung (6.) allemal identisch werden, so oft man statt t und u die neuen Coordinaten-Werthe eines beliebigen (eines jeden) Punktes der geraden Linie MN setzt. Deshalb ist (6.) nach (§. 19.) die Gleichung für die gerade Linie MN auf die neuen Axen bezogen. Und nimmt man in ihr α_1 und α_2 positiv, so hat man dadurch diejenige Region der neuen Axen als die erste angenommen, deren beide Schenkel auf der positiven Seite der alten Ordinaten-Axe in's Unendliche gehen.

§. 63. Zusatz.

Es erhellet, daß dasselbe Verfahren angewandt würde, wenn statt der Gleichung (§. 62. n. 1.) für die gerade Linie MN,

eine andere zwischen x und y für eine ganz beliebige (krumme) Linie gegeben wäre, und nun die neue Gleichung derselben (krummen) Linie, auf die gegebenen neuen Axen bezogen, gefunden werden sollte, d. h. die Gleichung zwischen t und u, welche allemal identisch wird, so oft statt t und u die Coordinaten-Werthe eines beliebigen (eines jeden) der Punkte dieser gegebenen (krummen) Linie gesetzt werden.

Weil aber aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y die neue Gleichung zwischen t und u dadurch gefunden wird, daß

$$\left.\begin{array}{l}\text{statt } x\\ \text{und statt } y\end{array}\right\} \text{Ausdrücke von der Form } m.u+n.t+p \text{ gesetzt}$$

werden, so folgt noch:

1) Ist die Gleichung zwischen x und y algebraisch und von der ersten, zweiten, dritten oder nten Ordnung, so wird die neue Gleichung zwischen t und u nothwendig ebenfalls algebraisch und von derselben Ordnung.

2) Ist die Gleichung zwischen x und y eine transcendente Gleichung (nach x allein oder nach y allein, oder nach beiden), so ist auch die neue Gleichung zwischen t und u eine transcendente.

3) Ist eine Gleichung zwischen x und y transcendent, so kann die andere zwischen t und u nie algebraisch werden; und ist die erstere algebraisch, so kann die letztere nie transcendent werden.

Es ist daher die Gattung der Gleichung und, wenn sie algebraisch ist, auch ihre Ordnung, für jede Linie, von der Lage der Axen ganz unabhängig.

Anmerkung. Hierauf gründet sich aber die Eintheilung aller Linien (der geraden und der krummen)

A) in algebraische,

B) in transcendente,

je nachdem die Gleichung zwischen den Coordinaten-Werthen x und y eines jeden ihrer einzelnen Punkte zu den algebraischen gehört oder zu den transcendenten (Einl. 38.)

Und die algebraischen Linien können dann wieder eingetheilt werden:

α) in algebraische der ersten Ordnung, deren Gleichung die Form hat: $A.y+B.x+C=0$, *)

β) in algebraische der zweiten Ordnung, deren Gleichung die Form hat:

$$A.y^2+B.xy+C.x^2+D.y+E.x+F=0,$$

γ) in algebraische der dritten Ordnung, deren Gleichung die Form annimmt:

$$A.y^3+B.xy^2+C.x^2y+D.x^3+E.y^2+F.xy+G.x^2 +H.y+K.x+L=0,$$

δ) in algebraische der μten Ordnung, in deren Gleichung die Glieder nach x und nach y von der μten Dimension, nehmlich:

$$A.y^{\mu}+B.xy^{\mu-1}+C.x^2.y^{\mu-2}+D.x^3.y^{\mu-3}+.... +P.x^{\mu-2}y^2+Q.x^{\mu-1}y+R.x^{\mu}$$

noch vorkommen, außer den übrigen, nach x und nach y von allen niedrigern Dimensionen; wo jedoch auch die Coeffizienten A, B, ...K, L, etc. etc. etc. zum Theil Null werden können, wenn nur jedesmal von der höchsten Dimension ein einziges Glied noch bleibt, damit die Gleichung nicht zu einer niedrigern Dimension gerechnet werden müsse.

---

*) Diese algebraische Linien der ersten Ordnung sind, wie wir (§. 21.) gesehen haben, allemal gerade Linien, von einander verschieden durch die verschiedene Lage gegen die Axen.

Viertes Kapitel.

Definition der Linien der 2ten Ordnung. Eintheilung derselben in 3 Klassen. Darstellung ihrer einfachsten Gleichung.

§. 64. Erklärung.

Jede krumme Linie, in welcher die Coordinaten-Werthe eines jeden einzelnen ihrer Punkte, für Axen, die in ihrer ersten Region den beliebigen Winkel φ bilden, statt x und statt y gesetzt, die algebraische Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x und y, nehmlich:

$$\text{I.}\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

identisch machen, heißt eine algebraische Linie der zweiten Ordnung oder auch blos eine Linie der 2ten Ordnung, mögen übrigens a, b, c, d, e und f beliebig Null oder positive oder negative Zahlen seyn, wenn sie nur den Bedingungen genügen, daß nehmlich der Gleichung wirklich eine krumme Linie entspricht (unter welchen Bedingungen diejenige oben an steht, daß nicht a, b und c zugleich Null seyn dürfen, weil sonst die Gleichung zur ersten Ordnung gehören, also eine gerade Linie vorstellen würde).

§. 65. Zusatz.

Die Gleichung aller möglichen Linien der zweiten Ordnung, nehmlich:

$$\text{I)}\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

nach y geordnet, gibt:

$$\text{II)}\quad y^2+\frac{b.x+d}{a}.y+\frac{c.x^2+e.x+f}{a}=0,$$

und nach y aufgelöst:

$$\text{III)}\quad y=$$

$$=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{(b^2-4ac).x^2+2(bd-2ae).x+(d^2-4af)}}{2a}.$$

Der Kürze wegen werden wir von nun an

$$b^2-4ac=p,\quad bd-2ae=q\quad \text{und}\quad d^2-4af=r$$

setzen, damit dieselbe Gleichung noch so;

$$\text{IV)}\quad y=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a}$$

geschrieben werden könne.

Dies gilt alles nach (E. 4.) für den Fall, daß a nicht Null ist. Sollte aber $a=0$ werden, so würde die Gleichung (I.) geordnet nach y, in

$$\text{II. 1)}\ldots\ (b.x+d).y+(c.x^2+e.x+f)=0,$$

und nach y aufgelöst, in

$$\text{III. 1)}\ldots\ y=-\frac{c.x^2+e.x+f}{b.x+d}$$

übergehen, so daß, während in (III., wo $a\gtrless 0$) zu jedem Werth von x, zwei Werthe von y gehören, jetzt in (III. 1, wo $a=0$ ist) jedesmal nur ein einziger Werth dazu gehört.

Anmerkung 1. Da übrigens die Gleichung (I.) nach (§. 64.) alle mögliche Linien der zweiten Ordnung enthält, wenn man nur jedesmal den Coefficienten a, b, c, d, e und f alle mögliche reelle Werthe beilegt, und jede dieser Gleichungen auf Axen bezieht, die nach und nach alle mögliche Winkel mit einander bilden; so wird alles darauf ankommen, diese Gleichung zu zergliedern und von jedem rein analytischen Resultat, welches aus dieser Zergliederung hervorgeht, seine geometrische Bedeutung

nachzuweisen; um die Lehre der Linien der 2ten Ordnung entwickelt zu haben.

Anmerkung 2. Dieselbe Gleichung auf dieselben Axen bezogen gibt auch noch verschiedene Linien, je nachdem man einen verschiedenen Maaßstab zu Grunde legt. Ist z. B. A die Linien-Einheit, womit Abscissen und Ordinaten gemessen worden sind, und B eine zweite, womit sie nun gemessen werden sollen, und zwar so, daß $A = \mu B$ ist, wo μ eine ganze oder gebrochene Zahl; und ist eine Abscisse $= x.A$, so ist auch dieselbe Abscisse $= \mu x.B$, oder $= x'.B$, wenn $\mu x = x'$ oder $x = \frac{x'}{\mu}$ gesetzt wird. Und ist dann eine Ordinate $= y.A$, so ist solche auch $= \mu y.B$, oder $= y'.B$, wenn $\mu y = y'$ oder $y = \frac{y'}{\mu}$ gesetzt wird. — Hätte man also die Gleichung (I.) zwischen x und y, welche sich auf die Einheit A beziehen, so erhält man jetzt, $\frac{x'}{\mu}$ und $\frac{y'}{\mu}$ statt x und y setzend:

$$\frac{a}{\mu^2}.y'^2 + \frac{b}{\mu^2}.x'y' + \frac{c}{\mu^2}.x'^2 + \frac{d}{\mu}.y' + \frac{e}{\mu}.x' + f = 0,$$

oder $a.y'^2 + b.x'y' + c.x'^2 + d\mu.y' + e\mu.x' + f\mu^2 = 0$

als die Gleichung zwischen den Abscissen-Werthen x' und y', welche sich auf dieselben Axen, aber auf die Einheit B beziehen. Hätte man also die Gleichung (I.) zwischen x und y auf die Einheit B bezogen, so hätte man offenbar eine andere Linie erhalten, als vorher, wo dieselbe Gleichung auf die Einheit A sich bezog.

In allen den folgenden Untersuchungen setzen wir, wie bisher, voraus, daß alle Linien als Zahlen in Rechnung gebracht werden, die sich durchweg auf eine, beständig dieselbe bleibende Einheit beziehen; weil, wenn in den Anwendungen die entgegengesetzte Bedingung vorkäme, die Gleichungen, nach dem was so eben entwickelt worden ist, sehr bald in andre verwandelt wer-

den können, wo alle Linien durch dieselbe Einheit gemessen gedacht sind.

Anmerkung 3. Obgleich nach der Definition, alle Linien der 2ten Ordnung nur dadurch erhalten werden, daß man in der Gleichung:

$$(I.)\ldots\ldots a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

den Coefficienten a, b, c, d, e und f alle mögliche reelle Werthe beigelegt sich denkt, und dann jede solche Gleichung auf Axen bezieht, welche nach und nach alle mögliche Winkel mit einander bilden, und die Coordinaten-Maaße zugleich auf alle mögliche Längen-Einheiten bezogen werden, so hat uns doch die vorhergehende Anmerkung gezeigt, daß, so wie man die Gleichung (I.) auf eine andere Einheit A beziehen will, dieselbe dann erhaltene Curve wiederum auf die alte Einheit B sich beziehen kann, wenn man nur den Coefficienten a, b, c, d, e und f andere und die schicklichen Werthe beilegt. Aber eben so wird eine der nächsten Untersuchungen uns belehren, daß man schon alle mögliche Linien der 2ten Ordnung erhält, wenn man den Coefficienten nur alle mögliche reelle Werthe beilegt, und alle diese Gleichungen auf einen einzigen bestimmten und unveränderlichen Winkel φ der Coordinaten-Axen bezieht.

§. 66. Zusatz.

Um nun zu untersuchen, für welche Werthe der Coefficienten a, b, c, d, e und f (die jedesmal als reelle Zahlen gedacht werden) die Gleichung,

$$(I.)\ \text{d. h.}\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

wirklich krumme Linien gibt, in welchen aber nicht, muß man solche in ihrer aufgelösten Form,

$$(III.)\ \text{d. h.}\quad y=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a},$$

wenn $p=b^2-4ac$, $q=bd-2ae$ und $r=d^2-4af$ und a nicht Null ist, oder

(III. 1.) d. h. $y = -\frac{c.x^2+e.x+f}{b.x+d}$, wenn $a=0$,

betrachten. —

Im letztern Fall, wo $a=0$ ist, gibt sie für jeden reellen Werth von x auch allemal einen reellen Werth von y (einen einzigen Werth von x ausgenommen, welcher $b.x+d$, aber nicht $c.x^2+e.x+f$, zu Null macht, und wo y die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, d. h. hier desto größer wird, absolut genommen, je näher $b.x+d$ der Null rückt, so daß man bildlich sagen kann, daß für $b.x+d=0$, y unendlich groß werde); also gibt die Gleichung (I.), wenn $a=0$ ist, allemal eine Linie mit unendlichen Schenkeln, die nach (§. 24.) keine gerade Linie seyn kann, also eine krumme seyn muß, so lange $c.x^2+e.x+f$ durch $b.x+d$ nicht im allgemeinen (d. h. während x noch unbestimmt bleibt) theilbar ist, so lange also nicht

$$c.x^2+e.x+f=(bx+d)(\mu x+\nu)$$

seyn wird, welches letztere nur dann der Fall ist, wenn $b^2f+c^2d=bde$ ist, nach (E. 19.).

Im erstern Fall, wo a nicht Null ist, wird die Gleichung (I.) in ihrer aufgelösten Form (IV.), nehmlich:

$$y=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a}$$

1) nicht einem einzigen Punkte entsprechen,

wenn $\begin{cases} p \text{ negativ und zugleich } q^2<pr, \\ \text{oder } p \text{ Null und } q=0 \text{ und } r \text{ negativ} \end{cases}$

ist, weil dann zu jedem reellen Werth von x, nach (E. 33.), allemal ein imaginärer Werth von y gehört, während nach der Definition (§§. 4 und 5.) die Coordinaten-Werthe eines jeden Punktes reelle Zahlen seyn müssen. Dieselbe Gleichung gibt

2) nur einen einzigen Punkt,

wenn p negativ und $q^2=pr$ ist,

weil dann nach (E. 37.) für jeden reellen Werth von x, das

y imaginär wird, den einzigen ausgenommen, welcher

dann $p.x^2+2q.x+r$, d. h. $p.x^2+2q.x+\frac{q^2}{p}$

oder $p.\left(x+\frac{q}{p}\right)^2$ zu Null macht. *) —

Dieselbe Gleichung (I.) gibt endlich

3) zwei gerade Linien, welche gegen einander und gegen die Axen eine völlig bestimmte Lage haben,

wenn $\begin{cases} p \text{ positiv und zugleich } q^2=pr \\ \text{oder } p=0,\ q=0 \text{ und } r \text{ positiv ist,} \end{cases}$

weil im erstern Fall nach (§. 24.):

$$\sqrt{p.x^2+2q.x+r}=\sqrt{p}.\left(x+\frac{q}{p}\right)$$

wird, die Gleichung (I.) also in

$$y=\left(\frac{-b+\sqrt{p}}{2a}\right).x+\left(\frac{-d+\frac{q}{\sqrt{p}}}{2a}\right)$$

übergeht, welches die Gleichung ist für eine gerade Linie nach (§. 21.), aber zwei verschiedene gerade Linien enthält, je nachdem man statt $\sqrt{p}$ ihren positven oder ihren negativen Werth setzt; — während im andern Falle dieselbe Gleichung in

$$y=\frac{-b}{2a}.x+\frac{-d\pm\sqrt{r}}{2a}$$

übergeht, und abermals zwei gerade Linien liefert.

---

*) Ist nehmlich $q^2<pr$, so sind die beiden Werthe von x, welche $p.x^2+2q.x+r$ zu Null machen und welche man durch Auflösung der Gleichung:

$$p.x^2+2q.x+r=0$$

erhält, nehmlich

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-pr}}{p},$$

allemal imaginär. Deshalb existirt im vorigen Fall kein reeller Werth von x, welcher y reell machen könnte; jetzt aber nur ein einziger, weil jetzt $q^2=pr$ ist, diese beiden Werthe von x also zusammenfallen.

Ist $a=0$, so ist $p=b^2-4ac=b^2$ allemal positiv, wenn b nicht Null und dabei allemal $q^2=pr$, weil dann $q=bd-2ae=bd$ und $r=d^2-4af=d^2$ wird. Wollte man daher das, was für a nicht Null gilt, noch gelten lassen, wenn $a=0$ ist, so würde man hier die Bedingung (3.) erfüllt sehen, und daraus folgern, daß so oft $a=0$ ist, so oft die Gleichung (I.) nur gerade Linien geben könne, während wir kurz vorher gesehen haben, daß, wenn $a=0$, die Curve allemal existirt, so oft nur nicht $b^2f+c^2d=bde$ ist.

Im allgemeinen kann man aber die Bedingung $q^2 \gtreqless pr$ verwandeln, wenn statt p, q, r ihre Werthe b^2-4ac, $bd-2ae$ und d^2-4af gesetzt werden, in

$$-abde+a^2e^2 \gtreqless -b^2ac-d^2af+4a^2cf,$$

oder, wenn man durch a wegdividirt,

$$-bde+ae^2 \gtreqless \text{ oder } \lesseqgtr -b^2c-d^2f+4acf,$$

je nachdem a positiv oder negativ gedacht war, nach (E. 13.). Und wollte man diese Bedingung auch noch für $a=0$ gelten lassen, so würde sie sich auf

$$-bde \gtreqless -b^2c-d^2f,$$

d. h. auf

$$b^2c+d^2f \gtreqless bde$$

reduciren, so daß also in diesem Sinne für $a=0$ die Bedingung $q^2=pr$ in diese andere $b^2c+d^2f=bde$ und $q^2 \lesseqgtr pr$ in $b^2c+d^2f \gtreqless bde$ übergehend gedacht werden könnte.

Unter dieser letztern Voraussetzung kann man nun sagen, daß in allen übrigen Fällen, namentlich

4) wenn p negativ, aber zugleich $q^2>pr$,

5) wenn $p=0$, aber nicht zugleich $q=0$,

6) wenn p positiv, aber zugleich $q^2 \lesseqgtr pr$,

(d. h. nicht zugleich $q^2 = pr$) ist, der Gleichung (I.) eine krumme Linie entspricht, weil dann zu stetig auf einander folgenden (reellen) Werthen von x, wenigstens eine Zeitlang stetig auf einander folgende reelle Werthe von y gehören müssen, während die dadurch entstehende Linie, nach (§. 23.) und in Verbindung mit der jetzigen, für diese letztern Fälle entstehenden Form der Gleichung, keine gerade seyn kann.

§. 67. Zusatz.

Indem wir aber von nun an voraussetzen, daß in der Gleichung (I.), die Coefficienten a, b, c, d, e und f solche reelle Werthe bedeuten, welche den Bedingungen (§. 66. n. n. 4 — 6.) entsprechen, wo

$$p = b^2 - 4ac, \quad q = bd - 2ae \quad \text{und} \quad r = d^2 - 4af$$

ist, werden die Curven, die dann allemal in der Gleichung (I.) oder in der aufgelösten

$$\text{IV.)} \ldots\ldots y = \frac{-(b.x+d) \pm \sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a}$$

enthalten sind, sehr wesentlich von einander verschieden seyn, je nachdem p positiv, oder Null, oder negativ seyn wird.

Da nehmlich x positiv oder negativ, aber jedesmal absolut so groß genommen werden kann, daß für diesen Werth von x und dann auch für jeden absolut größern *) Werth dasselbe x, das erste Glied $p.x^2$ absolut genommen, größer wird, als $2q.x+r$, absolut genommen, nach (E. 21 und 22.), daß also für diesen und dann für jeden absolut größern Werth von x, der ganze

---

*) Betrachtet man an den positiven oder negativen Zahlen ± 9 und ± 8 nur die absoluten Glieder 9 und 8, so sagen, wir: es sey $\pm 9 > \pm 8$, jedes absolut genommen. Es ist also z. B. -9 der absolut größere Werth, gegen $+8$ oder gegen -8, ebenfalls absolut genommen, gehalten. Dagegen ist bekanntlich

$$-9 < -8, \quad -9 < +8, \quad +9 > +8, \quad +9 > -9,$$

sobald man die Ausdrücke nimmt, wie sie sind, und nicht blos ihre absolute Glieder. Man vergl. (E. 14.).

Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ positiv oder negativ werden wird, je nachdem $p.x^2$ allein, also (weil x^2 allemal positiv ist) p allein positiv oder negativ seyn wird, so werden:

1) wenn p positiv ist, zu so großen Abscissen und dann zu jeder noch größern, links oder rechts gedacht, allemal reelle Ordinaten-Werthe von y gehören, so daß die Curve dann links zwei und auch rechts zwei, im Ganzen also vier unendliche Schenkel haben wird, etwa wie Fig. (31.). In diesem Falle nennen wir sie eine Hyperbel.

2) Ist aber p negativ, so werden zu so großen Abscissen und dann zu jeder noch größern, sowohl links als rechts genommen, allemal imaginäre Werthe von y gehören; also wird dann über gewisse Grenzen hinaus, weder links noch rechts, kein Punkt der Curve mehr existiren. Die Curve wird also nun sich bloß innerhalb gewisser Grenzen aufhalten und keinen unendlichen Schenkel haben, also etwa die Form (Fig. 32.) (besonders da auch keiner der Werthe von y unendlich groß werden kann); und diese Curve nennen wir von nun an eine Ellipse.

3) Es bleibt nun noch übrig den Fall zu betrachten, in welchem $p=0$ ist, wo dann nach (§. 66. n. 4.) nicht zugleich $q=0$ seyn kann, sondern q positiv oder negativ seyn wird. Ist aber q positiv, so kann man x $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ und absolut so groß nehmen, daß für diesen und für jeden andern, absolut noch größern Werth von x, $2q.x+r$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, also y $\left\{\begin{matrix}\text{reell}\\\text{imaginär}\end{matrix}\right\}$ wird (E. 22.), und es werden also dann rechts zwei unendliche Schenkel statt finden, links aber keiner, wie Fig. (33.). Und ist q negativ, so fällt leicht in die Augen, daß dann links zwei unendliche Schenkel existiren werden, rechts aber keiner. — Diese Linie der zweiten Ordnung, welche nur zwei unendliche Schenkel hat, nennen wir von nun an Parabel.

Dies für den Fall, wo a nicht Null ist. Betrachten wir nun aber noch den Ausnahms-Fall in welchem $a=0$ ist, und wo die Gleichung (I.) sich auf

$$y=-\frac{c.x^2+e.x+f}{b.x+d}$$

reducirt. Man unterscheide nun den Fall, wo $b=0$ und den andern, in welchem b nicht Null ist. Ist $b=0$, der Nenner also beständig derselbe, so wächst y bloß mit $c.x^2+e.x+f$ zugleich (jeder absolut gedacht) und da also nun zu jedem noch so großen positiven, aber auch zu jedem, absolut noch so großen negativen Werth von x, allemal ein reeller Werth von y gehört, so hat die Curve nun zwei unendliche Schenkel, einen rechts, den andern links (Fig. 35.), und gehört also zu denen die wir Parabeln nannten. — Ist dagegen b nicht Null, so hat die Curve eben so zwei unendliche Schenkel, wie vorher; aber weil auch y (absolut genommen) immerfort wächst, für alle diejenigen Werthe von x, welche den Nenner $b.x+d$ immer kleiner und kleiner machen (im absoluten Sinne), d. h. der Null immer näher bringen, so zeigt dadurch die Curve noch zwei unendliche Schenkel, von denen der eine erkannt wird, wenn man von den größern Werthen von x nach und nach zu demjenigen

$x=-\frac{d}{b}$ übergeht, welcher den Nenner $b.x+d$ zu Null macht; der andere unendliche Schenkel dagegen dadurch sich ergibt, daß man sich zuerst kleinere Werthe von x denkt und nach und nach von diesen kleinern Werthen von x zu dem andern

$x=-\frac{d}{b}$ den Uebergang macht, (wie Fig. (36.) zu sehen). In diesem letztern Falle hat also die Curve 4 unendliche Schenkel, und gehört zu denen, die wir so eben Hyperbeln genannt haben.

Anmerkung. Der eine dieser unendlichen Schenkel liegt rechts der zu $x=-\frac{d}{b}$ gehörigen Ordinaten-Linie, der an-

dere links derselben, und beide nähern sich ohne Ende dieser geraden Linie (deren Abscissen-Werth $-\frac{d}{b}$ ist), ohne sie jedoch je zu erreichen.

Dabei fällt noch in die Augen, daß während der Nenner $b.x+d$ durch Null durchgeht, derselbe für die Werthe von x, welche kleiner als $-\frac{d}{b}$ und für die andern Werthe von x, welcher größer als $-\frac{d}{b}$ sind, vom positiven zum negativen, oder vom negativen zum positiven übergehe; also auch y sein (+) oder (—) Zeichen ändere, so daß also der eine der letzt erwähnten zwei unendlichen Schenkel oberhalb, der andere unterhalb der Axe liegen werden, da nehmlich, während der Nenner $b.x+d$ durch Null durchgeht, nicht zugleich der Zähler $c.x^2+e.x+f$ durch Null durchgehen kann, weil sonst $c.x^2+e.x+f$ den Faktor $b.x+d$ (der gerade Null wird) haben müßte, demnach die Gleichung:

$$y=-\frac{c.x^2+e.x+f}{b.x+d}$$

durch diesen Faktor $b.x+d$ wegdividirt werden könnte, und daher in eine Gleichung von der Form

$$y=\mu.x+\nu$$

übergehen würde, d. h. in die Gleichung einer geraden Linie, welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 68. Zusatz.

Weil aber in dem einen Ausnahms-Fall, wo $a=0$ und zugleich $b=0$, und wo die Curve zu den Parabeln gehört, eben weil $a=0$ und $b=0$ ist, doch wieder p, d. h. b^2-4ac Null wird, und da in dem andern Ausnahms-Fall, wo $a=0$ und b nicht Null ist, und wo die Curve zu den Hyperbeln gehört, in der That wiederum p, d. h. b^2-4ac positiv ist, so folgt allgemein, mag a nicht Null oder Null seyn:

1) So oft p, d. h. $b^2 - 4ac$ positiv ist, so oft hat die Curve 4 unendliche Schenkel, und wird Hyperbel genannt.
2) So oft $p = 0$ ist, so oft hat die Curve nur zwei unendliche Schenkel, und wird Parabel genannt.
3) Und so oft p negativ ist, so hat die Curve gar keinen unendlichen Schenkel, und heißt Ellipse, wenn auch in allen

3 Fällen die Gleichung (I.), nehmlich

$$a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$$

auf beliebige Axen, (die nehmlich einen beliebigen Winkel φ mit einander bilden) bezogen wird *), wenn nur die Coefficienten a, b, c, d, e und f den sonstigen Bedingungen (§. 66. n. n. 4 — 6.) genügen, d. h. wirklich einer Curve entsprechen.

Anmerkung. Und weil nur diese 3 Fälle möglich sind, entweder p positiv, oder Null, oder negativ, so ist jede Linie der zweiten Ordnung entweder eine Hyperbel, oder eine Ellipse, oder eine Parabel.

Note. Später wird sich zeigen, daß unter allen Ellipsen auch die Kreislinie mit enthalten ist, so daß auch die Kreislinie eine Linie der zweiten Ordnung ist, der (§. 64.) gegebenen Definition zu Folge.

Beispiele. Es sind gegeben die Gleichungen:

1. 1.) $y^2 = 4x$,
2. 2.) $4x - y^2 + 2xy = 0$,
3. 3.) $y^2 + x^2 + 2x = y - 8$,

---

*) Will man dieselbe Curve auf andere und gegebene Axen beziehen, so wird sich die Gleichung ändern, aber nach (§. 63.) zwischen den neuen Coordinaten-Werthen t und u immer noch eine Gleichung der zweiten Ordnung bleiben, also die Form behalten:

$$A.u^2 + B.tu + C.t^2 + D.u + E.t + F = 0;$$

und da diese Gleichung keine Hyberbel geben kann nach (§. 67.), als nur wenn $B^2 - 4AC$ positiv ist, so folgt, daß, wenn $b^2 - 4ac$ positiv war, dann immer wieder $B^2 - 4AC$ positiv werden muß. — Eben so muß $b^2 - 4ac = 0$ auch allemal $B^2 - 4AC = 0$ machen, während für $b^2 - 4ac$ negativ, auch $B^2 - 4AC$ negativ werden muß; wie man auch die neuen Axen gelegt denken mag.

4.4.) $2.xy - y^2 - x^2 = 3y + 3x$,

5.5.) $4\frac{y^2}{x^2} - 9 = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x}$,

6.6.) $y = \frac{4}{x}$,

7.7.) $x^2 + y^2 - xy + y + x + 1 = 0$,

8.8.) $2x^2 + 3y^2 - 5x + 8 = 0$.

Man soll angeben, welche von diesen Gleichungen krummen Linien entsprechen, und welche unter diesen, Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen seyn werden.

So viel sieht man bei dem bloßen Anblick dieser Gleichungen, daß die Gleichung (I.) nehmlich:

(I.) ... $a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$,

jede einzelne derselben bereits vorstellt, sobald man sich nur unter den Coefficienten a, b, c, d, e, f, die gehörigen Ziffern-Werthe vorgestellt denkt. Diese Gleichung (I.) repräsentirt nehmlich

die Gleichung	wenn den Buchstaben	a,	b,	c,	d,	e,	f
(1. 1.)	die Werthe	1,	0,	0,	0,	−4,	0
oder die (2.2.)	= =	−1,	2,	0,	0,	4,	0
... (3.3.)	= =	1,	0,	1,	−1,	2,	8
... (4.4.)	= =	−1,	2,	−1,	3,	−3,	0
... (5.5.)	= =	4,	0,	−9,	0,	6,	−1 *)
... (6.6.)	= =	0,	1,	0,	0,	0,	−4
... (7.7.)	= =	1,	−1,	1,	1,	1,	1
... (8.8.)	= =	3,	0,	2,	0,	−5,	8

gegeben werden.

In der (1.1.) hat man nun $p = b^2 - 4ac = 0$, $q = bd - 2ae = 8$, und $r = d^2 - 4af = 0$; also ist keine der Ausnahms-Bedingungen (§. 66. n. n. 1 — 3.) erfüllt; mithin gibt die Gleichung (1. 1.) wirklich eine krumme Linie und zwar, weil p d. h. $b^2 - 4ac$ dasmal Null ist, eine Parabel, sobald man sich x und y als die Coordinaten-Werthe denkt, auf Axen bezogen, die einen beliebigen Winkel φ mit einander bilden.

Die Gleichung (2.2.), in welcher

*) Es versteht sich, daß alle diese Gleichungen (1.1.) bis (7.7.) geordnet werden müssen, wenn man sie als in der allgemeinen Gleichung (I.) enthalten ansehen will. Namentlich müssen also in (5.5. und 6.6.) die Brüche weggeschafft werden.

$p=b^2-4ac=4$, $q=bd-2ae=8$, $r=d^2-4af=0$ ist, findet sich als die Gleichung einer Hyperbel. Dasselbe gilt aber nicht mehr von (3.3.); denn weil in ihr

$$p=b^2-4ac=-4,\ q=bd-2ae=-4,\ r=d^2-4af=-31$$

ist, so ist die Bedingung (§. 66. n. 1.) erfüllt, und es gibt daher nicht einen einzigen Punkt in der Ebene der Axen, dessen Coordinaten-Werthe statt x und statt y gesetzt, der Gleichung (3.3.) genügen könnten, weil solche für jeden reellen Werth von x, nothwendig allemal imaginäre Werthe von y liefert. —

In der Gleichung (4.4.) hat man:

$$p=b^2-4ac=0,\ q=bd-2ae=0,\ r=d^2-4af=9;$$

also die Bedingung (§. 66. n. 3.) erfüllt, und die Gleichung (4.4.) läßt sich daher in zwei rationale einfache Faktoren zerlegen, nehmlich in

$$(y-x)(y-x-3)=0;$$

und sie gibt also die zwei geraden Linien welche, jede einzeln, durch die Gleichungen: $y=x$ und $y=x+3$ gegeben sind. —

In der Gleichung (5.5.) hat man:

$$p=b^2-4ac=144,\ q=bd-2ae=-48,\ d^2-4af=16,$$

also $q^2=pr$, nehmlich $(-48)^2=144\,.\,16$; und daher ist diese Gleichung abermals die, zweier geraden Linien

$$y=-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad y=\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{2};$$

weil die Bedingung (§. 66. n. 3.) erfüllt ist.

Die Gleichung (6.6.) gibt:

$$p=b^2-4ac=1,\ q=bd-2ae=0,\ r=d^2-4af=0;$$

also ist hier keine der Bedingungen (§. 66. n. n. 1 — 3.) erfüllt, mithin gibt die Gleichung (6.6.) eine krumme Linie, und zwar wiederum eine Hyperbel, weil p positiv ist.

Was die Gleichung (7.7.) betrifft, so ist in ihr

$$b^2-4ac=-3,\ bd-2ae=-3,\ d^2-4af=-3;$$

also ist dasmal die Bedingung (§. 66. n. 2.) erfüllt; und dieser Gleichung entspricht also nur ein einziger Punkt in der Ebene; derjenige Punkt nehmlich, dessen Abscissen-Werth $x=-1$ und dessen Ordinaten-Werth $y=-1$ ist. *)

Die Gleichung (8.8.) zuletzt hat:

$$p=b^2-4ac=-24,\ q=bd-2ae=30,\ r=d^2-4af=-96;$$

---

*) Solches sieht man auch ein, sobald man diese Gleichung (7.7.) auf diese andere Form gebracht hat:

$$\left[y-\frac{x-1}{2}\right]^2=-\tfrac{3}{4}.(x+1)^2.$$

also ist keine der Bedingungen (§. 66. n. n. 1 — 3) erfüllt; der Gleichung entspricht demnach eine Linie der zweiten Ordnung, und zwar, weil p negativ ist, eine Ellipse.

§. 69. Aufgabe.

Es ist, gegeben:

$$\text{I)}\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

als die Gleichung für jede mögliche Linie der 2ten Ordnung, die sich auf Axen bezieht, die in ihrer ersten Region den beliebigen Winkel φ mit einander bilden. Neue Axen sind gegeben durch die Gleichungen:

$$y_1=a_1.x_1+b_1 \quad \text{und} \quad y_2=a_2.x_2+b_2.$$

Man soll die Gleichung finden für dieselbe krumme Linie, zwischen den Coordinaten-Werthen t und u ihrer einzelnen Punkte, welche sich auf diese neue Axen beziehen.

Auflösung. Man verfährt genau nach (§. 63.), hat nach (§. 52.):

$$x=\frac{1}{\alpha_2}.u+\frac{1}{\alpha_1}.t+g;$$

$$y=\frac{a_2}{\alpha_2}.u+\frac{a_1}{\alpha_1}.t+h;$$

während

$$\alpha_1=\sqrt{1+a_1^2+2a_1.\cos\varphi;} \quad \alpha_2=\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi;}\ *)$$

$$g=\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} \quad \text{und} \quad h=\frac{a_1.b_2-b_1.a_2}{a_1-a_2}$$ gesetzt werden.

Substituirt man aber diese Werthe statt x und statt y in die Gleichung (I.) und ordnet man sogleich die neue Gleichung nach u und nach t so, wie die (I.) nach y und nach x geordnet ist, so erhält man:

---

*) Da für $t=u=0$, $x=g$ und $y=h$ wird, so sind g und h zu gleicher Zeit die alten Coordinaten-Werthe des neuen Anfangspunktes, also auch die Coordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes der beiden neuen Axen $y_1=a_1.x_1+b_1$ und $y_2=a_2.x_2+b_2$, so daß deshalb die beiden Gleichungen $h=a_1.g+b_1$ und $h=a_2.g+b_2$ identisch seyn müssen, und auch $b_1=h-a_1.g$ und $b_2=h-a_2.g$.

$$\left(a.\frac{a_2^2}{\alpha_2^2}+b.\frac{a_2}{\alpha_2^2}+c.\frac{1}{\alpha_2^2}\right).u^2$$

$$+\left(2a.\frac{a_1.a_2}{\alpha_1.\alpha_2}+b.\frac{a_1+a_2}{\alpha_1.\alpha_2}+2c.\frac{1}{\alpha_1.\alpha_2}\right).tu$$

$$+\left(a.\frac{a_1^2}{\alpha_1^2}+b.\frac{a_1}{\alpha_1^2}+c.\frac{1}{\alpha_1^2}\right).t^2$$

$$+\left(2.a.\frac{h.a_2}{\alpha_2}+b.\frac{g.a_2+h}{\alpha_2}+2c.\frac{g}{\alpha_2}+d.\frac{a_2}{\alpha_2}+e.\frac{1}{\alpha_2}\right).u$$

$$+\left(2a.\frac{h.a_1}{\alpha_1}+b.\frac{g.a_1+h}{\alpha_1}+2c.\frac{g}{\alpha_1}+d.\frac{a_1}{\alpha_1}+e.\frac{1}{\alpha_1}\right).t$$

$$+(a.h^2+b.gh+c.g^2+d.h+e.g+f)=0;$$

oder V.) ... $A.u^2+B.tu+C.t^2+D.u+E.t+F=0,$

während

$$A=\frac{a.a_2^2+b.a_2+c}{\alpha_2^2},$$

$$B=\frac{2a.a_1.a_2+b.(a_1+a_2)+2c}{\alpha_1.\alpha_2},$$

$$C=\frac{a.a_1^2+b.a_1+c}{\alpha_1^2},$$

$$D=\frac{2a.h.a_2+b.(g.a_2+h)+2c.g+d.a_2+e}{\alpha_2},$$

$$E=\frac{2a.h.a_1+b.(g.a_1+h)+2c.g+d.a_1+e}{\alpha_1},$$

$$F=a.h^2+b.gh+c.g^2+d.h+e.g+f$$

leicht berechnet werden können, da

$$g=\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} \quad \text{und} \quad h=\frac{a_1.b_2-b_1.a_2}{a_1-a_2} \quad \text{ist.}$$

§. 70. Zusatz.

Nimmt man $b_1=b_2=0$, so bleibt der alte Anfangs-Punkt der Coordinaten zugleich auch der neue, und wenn man

auch noch $a_1 = 0$ nimmt, so bleibt die alte Abscissen-Axe zugleich auch die neue, und es ändert sich in diesem Falle nichts, als der Winkel der Axen. Man erhält aber dann (wenn die alte Abscissen-Axe bleibt und die neue Ordinaten-Axe durch die Gleichung $y = a_2 . x$ gegeben ist), weil $\alpha_1 = 1$ wird und $g = h = 0$,

$$A = \frac{a . a_2^2 + b . a_2 + c}{\alpha_2^2},$$

$$B = \frac{b . a_2 + 2c}{\alpha_2},$$

$$C = c$$

$$D = \frac{d . a_2 + e}{\alpha_2},$$

$$E = e$$

$$F = f,$$

während

$$A . u^2 + B . tu + C . t^2 + D . u + E . t + F = 0$$

die neue Gleichung ist für dieselbe Curve, für welche, auf die alten Axen bezogen, die Gleichung:

$$a . y^2 + b . xy + c . x^2 + d . y + e . x + f = 0$$

gegeben war.

Daraus folgt aber zunächst, daß, wenn man alle mögliche Linien der zweiten Ordnung haben will, es nicht nöthig ist, den Coeffizienten a, b, c, d, e und f der Gleichung (I. §. 64.) alle mögliche relle Werthe zu geben, und dann doch noch jede dieser speziellen Gleichungen auf alle mögliche Winkel, welche die Axen mit einander bilden können, zu beziehen; sondern daß man aus der Gleichung:

$$a . y^2 + b . xy + c . x^2 + d . y + e . x + f = 0$$

bereits schon alle mögliche Linien der zweiten Ordnung erhält, wenn man sie auf einen einzigen bestimmten, übrigens beliebigen Winkel φ der Axen, welcher der größern Bequemlichkeit wegen ein rechter seyn könnte, bezieht, wenn man nur den

Coefficienten a, b, c, d, e und f alle mögliche reelle Werthe beilegt. Denn gesetzt, man bezieht dieselbe Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0,$$

auf einen andern Winkel, so ließe sich eine neue Ordinaten-Axe einführen, welche mit der Abscissen-Axe den alten Winkel bildete, und die neue Gleichung wäre dann wieder:

$$A.u^2+B.tu+C.t^2+D.u+E.t+F=0,$$

oder auch, wenn man, was t und u vorstellen, durch x und y vorstellen läßt, diese:

$$A.y^2+B.xy+C.x^2+D.y+E.x+F=0,$$

also dieselbe Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0,$$

nur daß jetzt die Coefficienten a, b, c, d, e und f, andere reelle Werthe haben.

§. 71. Zusatz.

Denkt man sich im (§. 69.) a_1 und a_2, desgleichen b_1 und b_2 (also auch g und h) noch unbestimmt, so kann man solche noch so bestimmen (d. h. man kann sich die neuen Axen noch so gelegt denken), daß die neue Gleichung zwischen t und u bestimmte (z. B. bedeutend einfachere) Formen annimmt, wenn man nur nicht unterläßt, den Umstand zu berücksichtigen, daß alle Ausdrücke, die hier vorkommen, reell seyn müssen. Dies werde näher untersucht.

1) Mögen in der gegebenen Gleichung (I.) noch so viele Glieder ganz gefehlt haben, d. h. noch so viele der Coefficienten a, b, c, d, e oder f Null gewesen seyn, wenn nur die Gleichung noch wirklich einer krummen Linie angehörte, (also auch a, b und c nicht zugleich Null sind), so kann man jedesmal neue Axen so legen, daß keiner der Coefficienten A, B, C, D, E und F der neuen Gleichung Null wird. *)

---

*) Schickte man diesen Satz, was möglich war, dem (§. 66. seq.) voraus, so durfte man dort nicht die Ausnahms-Fälle in denen $a=0$ ist,

Umgekehrt:

2) Da 4 unbestimmte Ausdrücke a_1, b_1, a_2 und b_2 mit den neuen Axen eingehen, so dürften sich im allgemeinen 4 Coefficienten der neuen Gleichung (V.) (nur nicht A, B und C zugleich) der Null gleich setzen lassen, (wenn die alte Gleichung in x und y auch alle 6 Coefficienten von Null verschieden gehabt hätte); jedoch müßte man jedesmal nicht blos die dazu nöthigen Werthe von a_1, b_1, a_2 und b_2 wirklich finden, sondern sich auch überzeugt haben, daß solche jedesmal reell sind.

3) Versucht man es und setzt $C=0$, d. h.

$$a.a_1^2+b.a_1+c=0,$$

so erhält man für a_1:

$$a_1=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

und dieses wird reell, wenn $b^2>4ac$ oder $b^2=4ac$, d. h. wenn die durch

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

vorgestellte Curve eine Hyperbel oder eine Parabel ist, dagegen imaginär, wenn $b^2<4ac$ seyn sollte, d. h. in der Ellipse, so daß in diesem letztern Fall, d. h. wenn die vorgestellte Curve eine Ellipse ist, der Coefficient C der neuen Gleichung, wie man auch die neuen Axen legen wollte, doch nie Null werden könnte.

Dasselbe gilt von A. — Aus $A=0$ oder

$$a.a_2^2+b.a_2+c=0$$

würde hervorgehen:

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$ *)

---

berücksichtigen, in so ferne dieselbe Curve jedesmal auf solche Axen bezogen werden konnte, für welche a nicht Null ist.

*) Ist aber $C=0$, so gibt die Gleichung der Curve, nach t aufgelöst:

$$t=-\frac{A.u^2+D.u+F}{B.u+E},$$

mithin zu jedem Werth von u nur einen einzigen Werth von t, so daß also dann die neue Abscissen-Axe, und alle mit ihr parallelen Linien, die Curve

4) Wollte man aber A und C zu gleicher Zeit Null haben, so müßte man für a_1 und a_2 die eben gefundenen Werthe setzen. Man müßte aber nicht übersehen, daß die neuen Axen sich schneiden müssen, daß also a_1 von a_2 verschieden seyn muß nach (§. 31.); und daß deshalb es nicht möglich ist, A und C zugleich Null werden zu lassen, wenn $b^2 = 4ac$ ist, (d. h. in der Parabel) (daß es in der Ellipse, wo $b^2 < 4ac$ ist, nicht seyn kann, ist vorher schon gesehen worden), weil dann a_1 und a_2 einander gleich werden würden. Es kann also nur dann A und C zugleich Null werden, wenn $b^2 > 4ac$ ist, d. h. wenn die Curve eine Hyperbel ist *) und dann muß, weil die beiden doppeldeutigen Ausdrücke für a_1 und a_2 übereinstimmen, wenn für a_1 der eine Werth derselben genommen wird, für a_2 allemal der andere genommen werden.

Und ist $b^2 > 4ac$, die Curve also eine Hyperbel, und hat man a_1 und a_2 so bestimmt, daß $A = 0$ und $C = 0$, so hindert nichts b_1 und b_2 so noch zu bestimmen, daß auch D und E zu Null werden, weil die Gleichungen $D = 0$ und $E = 0$,

---

nur in einem einzigen Punkte treffen. Wie man sieht, so ist dies in der Ellipse nie, in der Parabel nur bei einer, in der Hyperbel dagegen bei zwei verschiedenen Lagen der neuen Abscissen-Axe, der Fall.

Wollte man daher für eine gegebenen Linie der 2ten Ordnung die Gleichung für die Geraden finden, welche die Curve nur in einem einzigen Punkte treffen, so dürfte man nur die Gleichung:

$$y_I = a_I . x_I + b_I$$

für die neue Abscissen-Axe nehmen, und a_I so bestimmen, daß $C = 0$ wird;

d. h.
$$a_I = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Oder man könnte auch die Gleichung für die neue Ordinaten-Axe nehmen:

$$y_2 = a_2 . x_2 + b_2,$$

und darin a_2 so bestimmt denken, daß $A = 0$ wird.

*) So wie daher in einer Gleichung der 2ten Ordnung zwischen x und y, die Glieder x^2, y^2 gänzlich fehlen, so kann die vorgestellte Curve keine andere seyn, als eine Hyperbel. Fehlt das Glied x^2, oder das Glied y^2 allein, so kann die Curve keine Ellipse, wohl aber noch eine Parabel oder Hyperbel seyn.

wenn man statt g und statt h ihre Werthe setzt, aus (§. 69.), nehmlich:

$$g=\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2} \text{ und } h=\frac{a_1.b_2-a_2.b_1}{a_1-a_2},$$

allemal nach b_1 und b_2 vom ersten Grade werden, also, sobald a_1 und a_2 reell sind, auch b_1 und b_2 reell wirklich liefern. *) Für jede Hyperbel lassen sich also immer neue Axen so finden, daß die Gleichung für sie, zwischen den neuen Coordinaten-Werthen t und u, diese einfachste Gestalt:

$$B.tu+F=0$$

oder $tu=-\frac{F}{B}$ oder $tu=K$

annimmt. **)

---

*) Es gehen nehmlich die Gleichungen $D=0$ und $E=0$ über in:

1) $2a.a_2.h+b.(g.a_2+h)+2c.g+d.a_2+e=0$

und 2) $2a.a_1.h+b.(g.a_1+h)+2c.g+d.a_1+e=0.$

Subtrahirt man daher die obere von der untern, so erhält man:

3) $2a.h+b.g+d=0,$

und daraus $h=-\frac{bg+d}{2a}$; und dieser Werth von h in (2.) substituirt, gibt:

$$-\frac{b^2g+bd}{2a}+2cg+e=0,$$

d. h. $(b^2-4ac).g=2ae-bd,$ also $g=\frac{2ae-bd}{b^2-4ac}$ und dann $h=\frac{2cd-be}{b^2-4ac}$. Und ist g und h gefunden, so hat man noch:

$b_2-b_1=(a_1-a_2).g$ und $a_1.b_2-b_1.a_2=(a_1-a_2)h,$

und daraus folgt:

$$b_2=\frac{(bd-2ae).a_2-(be-2cd)}{b^2-4ac} \text{ und } b_1=\frac{(bd-2ae).a_1-(be-2cd)}{b^2-4ac}.$$

(Vergl. die untere Note zu Anfang des §. 69.).

**) Ist A und C zugleich Null, so gibt die Gleichung der Curve, nehmlich: $B.tu+D.u+E.t+F=0$ für jeden Werth von t nur einen einzigen Werth von u, aber auch für jeden Werth von u nur einen einzigen von t. Es sind also jetzt beide neue Axen und alle mit ihnen parallele Linien so gelegen, daß sie die Curve jedesmal nur in einem einzigen Punkte treffen. Und dies ist nur in der Hyperbel der Fall.

5) Setzt man $B=0$, so gibt dies die Gleichung:

$$2a.a_1.a_2+b.(a_1+a_2)+2c=0;$$

und da, wenn man a_1 beliebig reell annimmt, sich hieraus immer a_2 reell dazu findet, wie auch b^2-4ac oder p beschaffen seyn mag, so wird man für jede Linie der zweiten Ordnung, solche neue Axen finden können, daß ihre neue Gleichung in t und in u das Glied tu nicht mehr enthält. — Und dann kann man versuchen auch noch b_1 oder b_2 so zu bestimmen, daß noch D und E, oder noch D und F oder noch E und F zu Null werden, indem man die Gleichungen:

	$D=0$	und	$E=0$
oder	$D=0$	und	$F=0$
oder	$E=0$	und	$F=0$

nach b_1 und b_2 auflöst und nachsieht, ob sich jedesmal reelle Werthe dafür ergeben. *)

Und ist auch noch $D=E=0$. so liefert die Gleichung der Curve, nehmlich $B.tu+F=0$, jedesmal jeden der beiden Werthe von t und von u desto größer, je kleiner der andere genommen wird; so daß der eine alle Grenzen übersteigt, wenn der andere Null geworden. Die neuen Axen sind daher nun so gelegen, daß die 4 unendlichen Schenkel der Curve sich ihnen ohne Ende nähern ohne sie je zu erreichen. — Später werden solche gerade Linien Asymptoten der Hyperbel genannt werden; und wollte man also dann in einer durch die Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

gegebenen Hyperbel, die Lage der Asymptoten finden, so dürfte man nur die Gleichungen suchen:

$$y_1=a_1.x_1+b_1 \quad \text{und} \quad y_2=a_2.x_2+b_2$$

für zwei neue Axen, so gelegen, daß $A=C=D=E=0$ wird (und man hat gesehen, daß solches allemal möglich ist) und dies wären dann zugleich die Gleichungen für die Asymptoten der Hyperbel.

Und weil übrigens, wenn $D=E=0$ gesetzt wird, die Werthe von a_1 und a_2, wie sie sich aus $A=C=0$ ergeben haben, bleiben, so folgt zugleich (aus §. 31.), daß die Linien, welche die Hyperbel nur in einem einzigen Punkte treffen, allemal mit den Asymptoten parallel seyn müssen.

*) Ist $B=0$, so ist $B^2-4AC=-4AC$; und die Gleichung:

$$A.u^2+C.t^2+D.u+E.t+F=0$$

6) Es wird aber, wenn man a_1 beliebig annimmt, und a_2 aus $B=0$ dazu bestimmt, so daß

$$a_2 = -\frac{b.a_1+2c}{2a.a_1+b}$$

ist, und wenn man nachher noch $D=0$ und $E=0$ setzt, wie kurz vorher in der Note unten geschehen,

$$b_1 = \frac{(bd-2ae).a_1+(2cd-be)}{b^2-4ac}$$

und $$b_2 = \frac{(bd-2ae).a_2+(2cd-be)}{b^2-4ac},$$

so daß also b_1 und b_2 immer bestimmte und reelle Werthe erhalten, so oft b^2-4ac d. h. p, nicht Null, also so oft die Curve nicht eine Parabel ist. Für jede durch

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0,$$

(auf Axen bezogen, welche einen beliebigen Winkel φ mit einander bilden), gegebene Linie der zweiten Ordnung, sie mag eine Ellipse oder eine Hyperbel seyn, wenn sie nur keine Parabel ist, lassen sich also zwei neue Axen allemal so finden, daß die neue Gleichung diese einfachere Form:

$$A.u^2+C.t^2+F=0$$

annimmt, wo t und u die neuen Coordinaten-Werthe vorstellen. — Und da hierbei a_1 beliebig angenommen worden, so gibt es unzählich viele solche neue Axen-Paare, so daß man vielleicht unter allen noch dasjenige herausuchen kann, welches irgend einen bestimmten und gegebenen Winkel ψ hat. (S. §. 74). *)

---

liefert also dann nur eine Parabel, wenn entweder A oder C der Null gleich ist, während sie eine Ellipse oder Hyperbel gibt, je nachdem A und C einerlei oder verschiedene (+ oder —) Zeichen haben.

*) Weil in der Gleichung

$$A.u^2+C.t^2+F=0$$

nicht A oder C der Null gleich seyn kann, so lange die Gleichung nehmlich eine Curve vorstellt, so kann diese Gleichung nie eine Parabel vorstellen, dagegen noch jede Ellipse (wenn A und C einerlei (+ oder —) Zeichen ha-

7) Und nimmt man wiederum a_1 beliebig an, und bestimmt a_2 aus der Gleichung $B=0$ dazu, so daß

$$1.\,1)\quad a_2=-\frac{b.a_1+2c}{2a.a_1+b}$$

wird; und sucht man nun b_1 und b_2 so zu bestimmen, daß $D=0$ und $F=0$ wird, so hat man dazu die Gleichungen $D=0$ und $F=0$, d. h.

$$2.\,2)\quad (2a.a_2+b).h+(b.a_2+2c).g+(d.a_2+e)=0$$

und $$3.\,3)\quad a.h^2+b.gh+c.g^2+d.h+e.g+f=0;\ *)$$

---

ben) und noch jede Hyperbel (wenn A und C verschiedene (+ oder —) Zeichen haben).

Und weil die Gleichung

$$A.u^2+C.t^2+F=0$$

für jeden Werth von u zwei entgegengesetzte aber absolut gleiche Werthe von t, und umgekehrt, für jeden Werth von t zwei entgegengesetzte aber absolut gleiche Werthe von u liefert, so halbirt jetzt jede der beiden neuen Axen, die Sehnen welche mit der andern parallel laufen.

Es existiren also in jeder Ellipse und in jeder Hyperbel zwei gerade Linien, welche die Eigenschaft haben, daß eine jede derselben alle Sehnen halbirt, welche mit der andern parallel laufen. Solche Linien, welche eine Reihe mit einander paralleler Sehnen halbiren, werden in der Folge „Durchmesser", und solche zweie, wie sie so eben gefunden worden sind „zusammengehörige" oder „einander zugeordnete" Durchmesser genannt.

Und weil a_1 noch unbestimmt geblieben ist, also willkührlich genommen werden kann, so folgt, daß es in der Ellipse, wie in der Hyperbel unendlich viele (mit jeder beliebigen gegebenen Geraden, einen parallelen) Durchmesser überhaupt und eben so viele Paare „zusammengehöriger" Durchmesser gibt. Und will man also in einer durch die Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

gegebene Ellipse oder Hyperbel, die Gleichung für jedes mögliche Paar zusammengehöriger Durchmesser finden, so suche man die Gleichungen für zwei neue Axen, für welche $B=D=E=0$ wird. Und weil a_1 oder a_2 noch unbestimmt bleibt, so kann man auch noch die Bedingung hinzufügen, daß einer dieser Durchmesser durch einen gegebenen Punkt gehen, oder mit einer gegebenen Geraden parallel laufen solle.

*) So wie $F=0$ werden soll, d. h. so wie die Gleichung kein Glied mehr enthalten soll, welches mit t oder u multiplicirt ist, so liefert sie allemal für $t=0$, auch $u=0$, und der Anfangspunkt der neuen Coor-

und wenn man nun aus der (2. 2.) h findet und den Werth dafür in (3. 3.) setzt, um h zu eliminiren, so erhält man nach gehöriger Reduktion,

$$(b^2-4ac).g^2+2(bd-2ae).g+$$
$$+\left[d^2-4af+\frac{4acf+bde-cd^2-ae^2-fb^2}{a.a_2^2+b.a_2+c}\right]=0$$

oder, weil $p=b^2-4ac$, $q=bd-2ae$ und $r=d^2-4af$ ist,

$$4.\,4)\quad p.g^2+2q.g+\left[r+\frac{pr-q^2}{4a.(a.a_2^2+b.a_2+c)}\right]=0.$$

Ist nun g reell, so ist aus (2. 2.) auch h reell, und dann, weil $b_1=h-a_1.g$ und $b_2=h-a_2.g$ ist, nothwendig auch b_1 und b_2 reell, und die neuen Axen lassen sich dann wirklich so legen, wie verlangt worden.

In der Parabel, wo $p=0$ ist, reducirt sich aber diese Gleichung (4. 4.) augenblicklich auf eine vom 1ten Grade, gibt also g und dann auch h reell, mithin auch b_1 und b_2 reell und den Bedingungen entsprechend. — In der Ellipse und Hyperbel kommt es darauf an, wenn aus 4. 4.) g reell werden soll, nach (E. 17.) ob

---

dinaten-Werthe, d. h. der Durchschnittspunkt der neuen Coordinaten-Axen ist also zugleich ein Punkt der Curve. Da nun nach (§. 69.) g und h die Coordinaten-Werthe dieses Durchschnittspunktes sind (die alten nehmlich), so müssen g und h, statt x und statt y gesetzt, die Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

identisch machen, also muß

$$a.h^2+b.gh+c.g^2+d.h+e.g+f=0$$

seyn; während dabei g und h auch den Gleichungen:

$$y_1=a_1.x_1+b_1 \quad\text{und}\quad y_2=a_2.x_2+b_2$$

genügen müssen, wenn sie statt x_1 und y_1, eben so statt x_2 und y_2 gesetzt werden, so daß also noch

$$h=a_1.g+b_1 \quad\text{und}\quad h=a_2.g+b_2$$ seyn muß.

Umgekehrt, so oft der neue Anfangspunkt in der Curve selber liegt, so oft muß das Glied aus der Gleichung wegfallen, welches weder mit t noch mit u multiplicirt ist.

5. 5) $q^2 - p\left[r + \frac{pr - q^2}{4a(aa_2^2 + ba_2 + c)}\right]$ positiv

oder Null wird. Es reducirt sich aber dieser letztere Ausdruck

auf 6. 6) $(q^2 - pr)\left(1 + \frac{p}{4a(a.a_2^2 + b.a_2 + c)}\right)$

oder auf

7. 7) $(q^2 - pr)\frac{(2a.a_2 + b)^2}{4a(a.a_2^2 + b.a_2 + c)}$

und es bleibt also nur noch die Frage ob

8. 8) $\frac{q^2 - pr}{4a.(a.a_2^2 + b.a^2 + c)}$ positiv seyn werde,

weil $(2aa_2 + b)^2$ allemal positiv ist, wenn nicht Null. Weil aber in der Ellipse, $b^2 - 4ac$ oder p negativ ist, so sind die beiden Werthe von a_2, welche $a.a_2^2 + b.a_2 + c$ zu Null machen, imaginär; also behält $a.a_2^2 + b.a_2 + c$ für jeden reellen Werth von a_2 durchaus einerlei (+ oder —) Zeichen nach (E. 23.). Und da a positiv angenommen seyn kann, *) und in der Ellipse, wo $b^2 - 4ac$ negativ ist, c mit a einerlei (+ oder —) Zeichen haben, also mit a zugleich positiv seyn muß, und da also $a.a_2^2 + b.a_2 + c$ für $a_2 = 0$ positiv wird, so wird $a.a_2^2 + b.a_2 + c$ für jeden Werth von a_2 positiv; und weil zugleich auch in der Ellipse $q^2 > pr$ seyn muß (§. 66.), so ist der Ausdruck (8. 8.) in der That allemal positiv, also die Werthe von g, und dann auch die von h allemal reell, mithin auch b_1 nnd b_2 allemal reell. Und solche neue Axen sind also in der Ellipse, wie in der Parabel allemal möglich.

Was dagegen die Hyperbel betrifft, wo p positiv und $q^2 - pr$ sowohl positiv als auch negativ seyn kann, so haben

---

*) Sollte in der Gleichung

$$a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$$

der Coefficient a negativ seyn, so verwandle man nur das Zeichen aller Glieder in das entgegengesetzte, und die Gleichung wird dieselbe richtige bleiben, aber der Coefficient von y^2 wird positiv werden.

in ihr, weil $B=0$ und B^2-4AC, also $-AC$ ebenfalls positiv seyn muß, A und C, d. h.

$$a.a_2^2+b.a_2+c \quad \text{und} \quad a.a_1^2+b.a_1+c$$

nothwendig jedesmal verschiedene Zeichen. *) Weil ferner a positiv angenommen werden kann, und auch so gedacht ist, so werden $a.a_1^2+b.a_1+c$ und $a.a_2^2+b.a_2+c$ für einen absoluten sehr großen, negativen und positiven Werth von a_1 und a_2, allemal positiv werden; aber weil sie für

$\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}$ Null sind, allemal negativ, für alle Werthe von a_1 und a_2, die zwischen

$-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}$ und $-\frac{1}{2}b+\sqrt{b^2-4ac}$ liegen, nach (E. 23.). Es werden daher die Werthe von a_1 zwischen diesen letztgenannten Grenzen liegen, so oft die von a_2 nicht dazwischen liegen, und umgekehrt (sobald nur a_1 und a_2 so gedacht sind, daß $B=0$ wird, weil gerade dann in der Hyperbel A und C, also auch $aa_2^2+ba_2+c$ und $aa_1^2+ba_1+0$ verschiedene (+ oder −) Zeichen haben müssen). Ist nun $q^2>pr$, so ist der Ausdruck (S. 8.) nothwendig positiv, für alle die Werthe von a_2, welche nicht zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b\sqrt{b^2-4ac}$ und $-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac}$, also für alle die Werthe von a_1, welche gerade zwischen diesen Grenzen liegen (wenn nur a positiv gedacht ist, was geschehen darf).

---

*) Es ist $$a_2=-\frac{b.a_1+2c}{2aa_1+b},$$

also $$a.a_2^2+b.a_2+c=-\frac{p}{(2a.a_1+b)^2}(a.a_1^2+b.a_1+c)$$

und $$a_1-a_2=2.\frac{a.a_1^2+b.a_1+c}{2a.a_1+b};$$

und da jetzt (in der Hyperbel) $\frac{p}{(2a.a_1+b)^2}$ positiv ist, so erhellet auch hieraus, daß $a.a_2^2+b.a_2+c$ und $a.a_1^2+b.a_1+c$ jedesmal verschiedene (+ oder −) Zeichen haben.

Ist aber $q^2 < pr$, so ist der Ausdruck (8. 8.) positiv für alle die Werthe von a_2, welche zwischen den eben gedachten Grenzen liegen, also für alle Werthe von a_1, welche nicht dazwischen liegen.

Ist also $q^2 > pr$, so nehme man a_1 zwischen den Grenzen

$$-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac};$$

ist aber $q^2 < pr$, so nehme man a_1 nicht zwischen diesen Grenzen und jedesmal werden g und h, also b_1 und b_2 reell werden, also jedesmal wird man neue Axen auch für die Hyperbel finden, so daß die neue Gleichung die einfachere Form:

$$A.u^2+B.t^2+E.t=0 \quad \text{hat.}$$

8) In allen den Fällen aber, wo man dem a_1 solche Werthe gibt, daß in der Hyperbel für diese neue Axen die Gleichung die einfachere Gestalt $A.u^2+C.t^2+E.t=0$ nicht gewinnt, also so oft $q^2 > pr$ und a_1 nicht zwischen

$$-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{4}\sqrt{b^2-4ac} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac},$$

oder $q^2 < pr$ und a_1 gerade zwischen diesen Grenzen liegt, kann doch allemal für diese neue Axen die neue Gleichung die eben so einfache Form $A.u^2+C.t^2+D.u=0$ annehmen. Denn setzt man $E=0$ und $F=0$, so ergeben sich genau dieselben Resultate, wie wenn man $D=0$ und $F=0$ setzt, nur a_2 und a_1 mit einander vertauscht; so daß es also möglich ist, solche neue Axen zu legen, wenn $q^2 > pr$ und a_2 zwischen den Grenzen $-\tfrac{1}{2}b\pm\sqrt{b^2-4ac}$, also a_1 nicht zwischen diesen Grenzen, und wenn $q^2 < pr$ und a_2 nicht zwischen diesen Grenzen, also a_1 gerade zwischen diesen Grenzen liegt, wenn nur $B=0$, d. h. $a_2=-\dfrac{b.a_1+2c}{2aa_1+b}$ genommen ist.

Und eben aus diesem zuletzt angeführten Grunde folgt auch noch, daß wie in (n. 7.), so auch hier, sich ergeben müsse, daß es auch für die Ellipse und für die Parabel, d. h. für $p=$ negativ und für $p=0$ allemal möglich ist, neue Axen so zu legen,

daß die neue Gleichung derselben Curve, zwischen den neuen Coordinaten-Werthen t und u, diese einfachere Form:

$$A.u^2+C.t^2+D.u=0$$

annimmt, und daß dies durch unendlich viele neue Axen bewürkt werden kann, weil a_1 beliebig angenommen werden darf, wenn nur jedesmal a_2 so dazu gewählt wird, daß man $B=0$ hat. *)

9) Wollte man $B=0$ setzen, und dann noch $D=0$, $E=0$ und $F=0$, d. h. wollte man die 4 Ausdrücke a_1, a_2, b_1 und b_2, wodurch die Lage der neuen Axen bestimmt ist, so annehmen, daß zugleicher Zeit

$$B=0,\ D=0,\ E=0 \quad \text{und} \quad F=0$$

wird, so würde die Auflösung dieser 4 Gleichungen nach a_1, a_2, b_1 und b_2 darthun, daß solches nicht möglich ist. Man kann dies schon daran erkennen daß die neue Gleichung dann bloß die Form haben würde:

$$A.u^2+C.t^2=0,$$

folglich bloß einen einzigen Punkt liefern würde, nehmlich den Punkt $t=u=0$, oder zwei gerade Linien:

$$u=\left(\sqrt{-\frac{C}{A}}\right).t,$$

---

*) Ist aber die Gleichung aller Linien der zweiten Ordnung auf die Form:

$$A.u^2+C.t^2+E.t+F=0$$

oder

$$A.u^2+C.t^2+D.u+F=0$$

gebracht, wo $F=0$, oder auch nicht $=0$ seyn mag, so gibt die erstere zu jedem Werth von t zwei gleiche Werthe von u, und die andere zu jedem Werth von u zwei gleiche Werthe von t. Im erstern Fall ist daher die Abscissen-Axe Durchmesser für die Sehnen, welche mit der Ordinaten-Axe parallel laufen; im andern Fall dagegen ist die Ordinaten-Axe Durchmesser für die Sehnen, welche mit der Abscissen-Axe parallel laufen. Es hat also auch die Parabel unendlich viele Durchmesser, die für jede, durch die Gleichung

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

gegebene Parabel, dadurch gefunden werden, daß man die Gleichung sucht für diejenige Abscissen-Axe, welche $B=0$, und $D=0$ macht, oder die Gleichung für die Ordinaten-Axe, welche $B=0$ und $E=0$ macht.

je nachdem A und C einerlei oder verschiedene (+ oder —) Zeichen haben.

10) Ueberhaupt wäre es schon unmöglich, bloß $D=0$, $E=0$ und zugleich $F=0$ zu machen, durch anzunehmende Werthe von a_1, a_2, b_1 oder b_2, wenn man auch nicht $B=0$ haben wollte; denn aus $D=0$ und $E=0$ folgt:

$$g=-\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}=-\frac{q}{p} \text{ und } h=-\frac{be-2cd}{b^2-4ac}=-\frac{be-2cd}{p};$$

und substituirte man diese Werthe für g und h in die dritte Gleichung $F=0$, so würde letztere weder b_1 noch b_2, aber auch weder a_1 noch a_2, und deshalb im allgemeinen einen Widerspruch enthalten. Dies bestätigt sich in der That nach geschehener Substitution und ergibt sich durch Rechnung am einfachsten, wenn man die dritte Gleichung $F=0$ nach h auflöst und

$$h=\frac{-(b.g+d)\pm\sqrt{p.g^2+2q.g+r}}{2a}$$

findet; dann aber statt g und h die obigen Werthe setzt, wo man sogleich erhält:

$$-\frac{be-2cd}{p}=\frac{b\frac{q}{p}-d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{-\frac{q^2-pr}{p}},$$

während

$$\frac{b.\frac{q}{p}-d}{2a}=\frac{bq-dp}{2a.p}=\frac{b(bd-2ae)-d(b^2-4ac)}{2a.p}=$$

$$=-\frac{be-2cd}{p}$$

ist, so daß sich die vorige Gleichung auf $\sqrt{-(q^2-pr)}=0$, d. h. auf $q^2-pr=0$ reducirt, welches, so lange durch die gegebene Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

wirklich eine Curve vorgestellt ist, dem (§. 66.) zu Folge nie möglich ist, sondern jedesmal einen Widerspruch enthält.

Dasselbe ergibt sich aber schon daraus, daß, wenn $D=0$, $E=0$ und zugleich $F=0$ genommen werden könnte, dann die neue Gleichung der Curve die Form:

$$A.u^2+B.tu+C.t^2=0$$

haben würde, und dann auf die Form:

$$\left(u+\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.t\right)\left(u+\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.t\right)=0$$

gebracht werden könnte, welche Form jedoch entweder gar keinem einzigen Punkte, oder einer geraden Linie oder zweien geraden Linien entspricht, je nachdem die Coefficienten von t in diesen beiden Faktoren imaginär, oder reell und gleich, oder reell und ungleich sind.

§. 72. Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob die Gleichung:

$$\alpha.y^2+\beta.x^2+\gamma.x=0,$$

wenn man in ihr den Coefficienten α, β und γ nach und nach alle mögliche reelle Werthe beigelegt denkt, jede dieser Gleichungen aber auf Axen bloß bezieht, welche fortwährend einen und denselben unveränderlichen Winkel ψ, der übrigens beliebig gegeben seyn mag, mit einander bilden, während x und y die Coordinaten-Werthe der einzelnen zur Gleichung gehörigen Punkte vorstellen, — ob dann diese Gleichung noch jede mögliche Linie der 2ten Ordnung vorstellt; d. h. mit andern Worten, ob es allemal möglich ist, wenn

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

auf Axen bezogen wird, die in ihrer ersten Region einen beliebigen Winkel φ mit einander bilden, die dadurch vorgestellte Curve auf solche neue Axen zu beziehen, welche den gegebenen Winkel ψ mit einander bilden, und für welche die Gleichung derselben krummen Linie, diese einfachere Form:

$$\alpha.u^2+\beta.t^2+\gamma.t=0$$

annimmt.

Auflösung. Wir haben (§. 71. n. 7.) gesehen, daß, wenn $b^2 \lessgtr 4ac$, d. h. wenn die durch

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

vorgestellte Curve nach (§. 68.) eine Parabel oder eine Ellipse ist, allemal a_1 ganz beliebig reell angenommen, dann aber a_2 und b_1 und b_2 so dazu reell gefunden werden können, daß

$$y_1=a_1.x+b_1 \quad \text{und} \quad y_2=a_2.x_2+b_2$$

die Gleichungen für die neuen Axen sind, für welche die Gleichung derselben Curve die Form:

$$A.u^2+C.t^2+E.t=0$$

annimmt, während die Werthe von A, C und E (§. 69.) bereits entwickelt stehen.

Dagegen erhellet aus demselben (§. 71. n. n. 7. und 8.), daß, wenn $b^2>4ac$, die gegebene Curve also eine Hyperbel ist, und wenn man a_1 beliebig reell annimmt, dann allemal a_2 und b_1 und b_2 so reell dazu gefunden werden können, daß die Gleichung derselben Curve auf diese neue Axen

$$y_1=a_1.x_1+b_1 \quad \text{und} \quad y_2=a_2.x_2+b_2$$

bezogen, entweder die Form:

$$(\odot) \ldots\ A.u^2+C.t^2+E.t=0,$$

oder doch die Form:

$$(\mathbb{C}) \ldots\ A.u^2+C.t^2+D.u=0$$

annehmen wird, je nachdem in Bezug auf den Werth von a_1 und den Werthen von q^2-pr, die eine oder die andere der dortigen Bedingungen erfüllt seyn wird. Weil aber die Form ($\mathbb{C}$) von der Form ($\odot$) nicht mehr verschieden ist, als nur dadurch, daß, was sich in ($\odot$) auf die Abscissen-Werthe bezieht, in ($\mathbb{C}$) auf die Ordinaten-Werthe bezogen werden muß, so reduciren sich auch für die Hyperbel beide der Formen ($\odot$) und ($\mathbb{C}$) auf diese einzige:

$$(\sigma') \quad \alpha.u^2+\beta.t^2+\gamma.t=0,$$

wenn man nur im Falle der letztern Form (C), das t in der Gleichung (♂) als den Ordinaten-Werth und u als den Abscissen-Werth ansieht, was durch bloße Vertauschung der Coordinaten-Axen bewirkt wird.

Da also in jedem Falle, es mag die Curve, eine Parabel, Ellipse oder eine Hyperbel seyn, a_1 beliebig reell angenommen werden kann, und dann a_2, b_1 und b_2 immer so reell dazu gefunden werden, daß $y_1=a_1.x+b_1$ entweder als neue Abscissen-Axe oder doch als neue Ordinaten-Axe, — und $y_2=a_2.x_2+b_2$ entweder als neue Ordinaten-Axe oder doch als neue Abscissen-Axe existirt, so daß die neue Gleichung derselben Curve die Form:

$$\alpha.u^2+\beta.t^2+\gamma.t=0$$

annimmt, so frägt sich nur noch, ob man jedesmal den Werth von a_1 reell und so wird annehmen können, daß der, nach (§. 34.) bloß von dem Werth von a_1 und dem zugehörigen Werthe von a_2 (der aus $B=0$ dazu gefunden und

$$1) \quad a_2=-\frac{b.a_1+2c}{2a.a_1+b}$$

geworden ist) abhängige Winkel der neuen Coordinaten-Axen, dem gegebenen Winkel ψ gleich wird; d. h. ob man a_1 aus der Gleichung (§. 34.), nehmlich:

$$2) \quad \frac{1+a_1.a_2+(a_1+a_2).\cos\varphi}{\sqrt{1+a_1^2+2a_1.\cos\varphi}\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}}=\cos\psi,$$

wenn für a_2 der Werth $-\frac{b.a_1+2c}{2a.a_1+b}$ gesetzt wird, allemal reell findet.

Es findet sich aber nach (§. 36.) aus (2.):

$$3) \quad a_2=-\frac{\sin(\psi\mp\varphi).a_1+\sin\psi}{\sin\psi.a_1+\sin(\psi\mp\varphi)}.$$

Und setzt man diesen Werth von a_2 dem aus (1.) gleich, um a_2 zu eliminiren, so erhält man nach allen Reduktionen die quadratische Gleichung:

$$(4)\ldots\begin{cases}[2a.\sin(\psi\pm\varphi)-b.\sin\psi].a_1^2\\ +2[a.\sin\psi\pm b.\sin\varphi.\cos\psi^*)-c.\sin\psi].a_1\\ +[b.\sin\psi-2c.\sin(\psi\mp\varphi)]\end{cases}=0;$$

und es frägt sich daher nur noch, ob die hieraus hervorgehenden Werthe von a_1 allemal nothwendig reell sind. — Es sind aber nach (E. 17.) diese Werthe von a_1 nothwendig reell, wenn

$$(5)\ldots[(a-c).\sin\psi\pm b.\sin\varphi.\cos\psi]^2 +(2a.\sin(\psi\pm\varphi)-b.\sin\psi).(2c.\sin(\psi\mp\varphi)-b.\sin\psi)$$

allemal positiv oder Null ist. Dabei reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$(6)\ldots\begin{cases}b^2.[\sin^2\psi+\sin^2\varphi.\cos^2\psi]\\ -2b.[(a+c).\sin^2\psi.\cos\varphi]\\ +[(a+c)^2.\sin^2\psi-4ac.\sin^2\varphi\ **)]\end{cases};$$

und dieser Ausdruck ist nach (E. 20.) wiederum für jeden reellen Werth von b positiv oder Null, wenn

$$7)\ldots(\sin^2\psi+\sin^2\varphi.\cos^2\psi).[(a+c)^2.\sin^2\psi- -4ac.\sin^2\varphi]-(a+c)^2.\sin^4\psi.\cos^2\varphi$$

positiv oder Null ist (da der Coefficient von b^2, nehmlich $\sin^2\psi+\sin^2\varphi.\cos^2\psi$, nothwendig allemal positiv seyn muß). Es reducirt sich aber dieser Ausdruck (7) sogleich auf folgenden: ***)

$$8)\ldots\sin^2\varphi[\sin^2\psi.a^2-2ac.(\sin^2\psi+\sin^2\varphi.\cos^2\psi)+ +\sin^2\psi.c^2]$$

und dieser ist wiederum positiv oder Null, wenn der zweite Faktor:

$$9)\ldots\sin^2\psi.a^2-2[\sin^2\psi+\sin^2\varphi.\cos^2\psi].ac+\sin^2\psi.c^2,$$

für jeden reellen Werth von a und c positiv oder Null ist. Und

---

*) Es ist nehmlich
$$\sin(\psi\pm\varphi)-\sin(\psi\mp\varphi)=\pm2\sin\varphi.\cos\psi.$$

**) Weil $\sin(\psi\pm\varphi).\sin(\psi\mp\varphi)=\sin^2\psi-\sin^2\varphi.$

***) Weil $\sin^2\psi+\sin^2\varphi.\cos^2\psi=1-\cos^2\varphi.\cos^2\psi$ und $(a+c)^2=(a-c)^2+4ac$ ist.

dieses letztere ist nach (E. 20.) in der That der Fall. Also sind die beiden Werthe von α_1 aus (4.) allemal in der That reell.

Demnach ist allemal möglich, neue Axen, welche einen gegebenen Winkel ψ bilden, dergestalt zu finden, daß die durch

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

ausgedrückte (also jede) Linie der zweiten Ordnung durch die einfachere Gleichung:

$$\alpha.u^2+\beta.t^2+\gamma.t=0$$

ausgedrückt werde, wo t und u die neuen Coordinaten-Werthe vorstellen, von denen jedesmal jeder beliebige zum Abscissen-Werth, der andere dann zum Ordinaten-Werth genommen werden kann.

Anmerkung. Da in der vorstehenden Auflösung die Gleichungen (1. und 2.) zur Bestimmung von a_1 ganz symetrisch sind in Bezug auf a_1 und a_2 (in so ferne die (1.) ursprünglich die Form:

$$2a.a_1.a_2+b.(a_1+a_2)+2c=0$$

hatte), so folgt, daß, wenn man sie nach a_2 auflöst, sie für a_2 genau dieselbe Formeln liefern müssen, welche sie für a_1 geben.

Dieselbe Formel, welche die beiden Werthe von a_1 liefert, gibt also auch die beiden Werthe von a_2, und da a_1 von a_2 verschieden seyn muß, so wird, wenn der eine Werth statt a_1 gesetzt wird, der andere allemal zugleich der zugehörige Werth von a_2 seyn. Obgleich also a_1 zwei reelle Werthe hat, so erhält man doch nur ein Axen-Paar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

§. 73. Zusatz.

Weil aber dem (§. 72.) zu Folge, die einfachere Gleichung:

$$\alpha.y^2+\beta.x^2+\gamma.x=0$$

auf Axen bezogen, welche irgend einen beliebig gegebenen Winkel ψ mit einander bilden, noch immer alle mögliche Linien der

zweiten Ordnung, wie solche (§. 64.) definirt worden sind, enthält, wenn man nur den Coefficienten α, β und γ nach und nach alle mögliche reelle Werthe beilegt, so werden wir in der Folge, um alle mögliche Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln näher zu untersuchen, viel bequemer diese letztere einfachere Gleichung:

$$\alpha.y^2+\beta.x^2+\gamma.x=0$$

zu Grunde legen, und dabei der noch größern Bequemlichkeit wegen rechtwinkliche Axen voraussetzen können.

§. 74. Zusatz.

Aber aus derselben Untersuchung des (§. 72.) geht zugleich hervor, in Verbindung mit (§. 71. n. 6.), daß die Gleichung:

$$\alpha.y^2+\beta.x^2+\gamma=0$$

auf Axen bezogen, welche einen beliebig gegebenen Winkel ψ mit einander bilden, noch alle mögliche Hyperbeln und Ellipsen vorstellt, wenn man nur den Coefficienten α, β und γ nach und nach alle mögliche reelle Werthe beigelegt denkt. Dagegen ist diese Gleichung nie geeignet eine Parabel auszudrücken, auf welchen Axenwinkel sie auch bezogen werden möchte.

§. 75. Zusatz.

In (§. 71. n. 4.) haben wir gesehen, daß jede gegebene Hyperbel allemal auf solche Axen bezogen werden kann, daß die Gleichung für sie diese einfachste Form:

$$t.u=K \quad \text{oder} \quad x.y=K$$

annimmt, daß aber dazu die Werthe von a_1, b_1, a_2 und b_2, also die Lage beider neuen Axen völlig bestimmt wird, also der Winkel der neuen Axen nicht noch ein beliebig gegebener werden kann.

Es wird daher die Gleichung: $x.y=K$ zwar allemal eine Hyperbel ausdrücken, wenn man sie auf einen gegebenen Axenwinkel ψ bezieht, und dabei dem K nach und nach jeden möglichen reellen Werth beilegt; dagegen wird sie nur dann

alle mögliche Hyperbeln vorstellen, wenn sie zugleich auf alle mögliche Axenwinkel bezogen wird.

Für jeden andern Axenwinkel wird also die Gleichung: $xy = K$ welchen Werth man auch dem K beilegen mag, doch nie dieselbe Hyperbel wiedergeben, welche man für irgend einen gegebenen Werth von K und für den gegebenen Axenwinkel ψ aus derselben Gleichung erhalten haben kann.

Wollte man daher die Eigenschaften aller möglichen Hyperbeln blos aus der Gleichung $xy = K$ ableiten, so müßte man sich nicht blos K, sondern auch den Axenwinkel ψ als veränderlich denken, d. h. als nach und nach jeden möglichen (den übrigen Voraussetzungen entsprechenden) Werth annehmend.

§. 76. Zusatz.

Zuletzt erhellet, daß, wenn die Gleichung:

$$A.u^2 + C.t^2 + E.t = 0,$$

d. h.

$$u^2 = -\frac{C}{A}.t^2 - \frac{E}{A}.t$$

auf irgend einen beliebig gegebenen Axenwinkel ψ bezogen, im Stande ist noch alle mögliche Linien der zweiten Ordnung vorzustellen, dies um so mehr mit der Gleichung:

$$y^2 = \alpha + \beta.x + \gamma.x^2$$

der Fall seyn wird. — In der That hängen die Untersuchungen der (§. 71. n. n. 7 und 8. und §. 72.) nicht davon ab, ob $F = 0$ oder nicht $= 0$ gesetzt worden, werden daher mit größerer Leichtigkeit noch für den letztern Fall wiederholt werden können.

Schluß-Anmerkung. In der Folge werden wir, um die nähern Eigenschaften der Linien der zweiten Ordnung (d. h. der Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln) kennen zu lernen, allemal die einfachere Gleichnng:

$$y^2 = \alpha + \beta.x + \gamma.x^2$$

zu Grunde legen, wenn man will, auf rechtwinkliche Axen bezogen (weil wir nehmlich durch das Vorgehende zu der Ueberzeugung gekommen sind, daß wir dann doch noch alle mögliche dieser Linien vorgestellt haben, das dann Gefundene also wirklich für alle diese im (§. 64.) definirte Linien gilt.)

In dem nächsten Kapitel wollen wir jedoch zuvor noch einige allgemeine Untersuchungen anstellen, um uns noch mehr in dem allgemeinen Arbeiten (dem eigentlichen Gegenstande der mathematischen Analysis) zu üben.

Fünftes Kapitel.

Berührende und schneidende Linien. Durchmesser, Halbmesser, Mittelpunkt, Haupt-Durchmesser.

§. 77. Aufgabe.

Es sind 5 Punkte B, C, D, E und F (Fig. 39.) in einer Ebene auf eine beliebige Weise gegeben. Man soll eine Linie der zweiten Ordnung beschreiben, welche durch diese 5 Punkte hindurchgeht.

Auflösung. Man denke sich in derselben Ebene zwei beliebige Axen X'AX und Y'AY gezogen, welche einen beliebigen Winkel φ (in ihrer ersten Region) mit einander bilden, und bestimme für jede der 5 gegebenen Punkte die Coordinaten, und daraus nach (§. §. 4. 5.) die Coordinaten-Werthe, welche beziehlich

(α, β), (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3) und (α_4, β_4)

seyn mögen. Da nun die zu legende Linie, von der zweiten Ordnung, also in Bezug auf diese beliebig festgesetzten Axen durch die Gleichung:

$$a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$$

gegeben seyn soll, so kommt alles darauf an die jetzt noch unbestimmten Coefficienten a, b, c, d, e, f den Bedingungen gemäß zu bestimmen. Weil aber dieselbe Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$y^2+\frac{b}{a}.xy+\frac{c}{a}.x^2+\frac{d}{a}.y+\frac{e}{a}.x+\frac{f}{a}=0,$$

so sind eigentlich nur die 5 Coefficienten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, $\frac{e}{a}$ und $\frac{f}{a}$ zu bestimmen, welche man beziehlich durch b', c', d', e' und f' bezeichnen könnte. Und da endlich die gegebenen Punkte B, C, D, E und F zugleich auch Punkte der gesuchten Curve seyn sollen, so müssen ihre Coordinaten-Werthe in die Gleichung:

$$y^2+b'.xy+c'.x^2+d'.y+e'.x+f'=0$$

statt x und y substituirt, solche identisch machen, nach (§. 18.). Also hat man nun die 5 identischen Gleichungen:

1) $\beta^2+b'.\alpha\beta+c'.\alpha^2+d'.\beta+e'.\alpha+f'=0$
2) $\beta_1^2+b'.\alpha_1.\beta_1+c'.\alpha_1^2+d'.\beta_1+e'.\alpha_1+f'=0$
3) $\beta_2^2+b'.\alpha_2.\beta_2+c'.\alpha_2^2+d'.\beta_2+e'.\alpha_2+f'=0$
4) $\beta_3^2+b'.\alpha_3.\beta_3+c'.\alpha_3^2+d'.\beta_3+e'.\alpha_3+f'=0$
5) $\beta_4^2+b'.\alpha_4.\beta_4+c'.\alpha_4^2+d'.\beta_4+e'.\alpha_4+f'=0,$

welche nach den noch unbekannten Coefficienten b', c', d', e', f' Bestimmungsgleichungen sind, und zwar einfache algebraische, so daß sie zur Bestimmung dieser Coefficienten im Allgemeinen dienen werden.

Note 1. Wenn zur Bestimmung von 5 Unbekannten, 5 Gleichungen gegeben sind, so werden sich diese 5 Unbekannten im Allgemeinen finden lassen; allein in einzelnen besondern Fällen, können die 5 Gleichungen zusammenfallen in eine geringere Anzahl; in andern dagegen können sich dieselben Gleichungen geradezu widersprechen, so daß es dann nicht möglich ist, Werthe für die Unbekannten zu finden welche allen 5en zugleich genügen. Bei der vorliegenden Aufgabe wäre dies z. B. gewiß der Fall, wenn 3 oder 4 der gegebenen Punkte in einer und derselben geraden Linie lägen.

Note 2. Wenn es hier heißt, daß die Coordinaten der 5 Punkte gefunden werden sollen, so ist nicht gerade darunter verstanden, daß

der Zeichner die 5 Punkte auf dem Papier versinnlicht gegeben habe und nun die Coordinaten dazu zeichnen solle, sondern es können vielleicht aus der Art, wie die 5 Punkte gegeben sind, die Coordinaten durch Rechnung (Trigonometrie) gefunden werden.

Note 3. Und wollte man sich die Rechnungen erleichtern, so konnte man durch 2 der gegebenen Punkte, z. B. durch B und C (Fig. 39.) die Abscissen-Axe und dann durch einen dieser beiden Punkte und durch einen dritten z. B. durch C und D die Ordinaten-Axe legen; denn dann würde $\alpha = -CB$, $\beta = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = CD$, $\alpha_3 = CE'$, $\beta_3 = -EE'$, $\alpha_4 = -CF'$ und $\beta_4 = -FF'$, in so ferne man X_1CY_1 zur ersten Region der Axen nimmt. Die 3 ersten der 5 Gleichungen des (§.) reduciren sich dann nicht unbedeutend und namentlich geht die zweite sogleich in $f' = 0$ über, so daß sich alle übrigen um dieses Glied vereinfachen.

Note 4. Hat man aber die allgemeine Gleichung der Linie der 2ten Ordnung gefunden, welche durch diese gegebenen 5 Punkte hindurchgeht, so kann man nun sogleich nach (§. 71.) und (§. 72.) die einfacheren Gleichungen ableiten und namentlich auch diejenige, welche nicht blos ihrer Form nach die einfachste ist, sondern zugleich auch sich auf einen gegebenen Axen-Winkel ψ bezieht, also z. B. auf rechtwinkliche Axen, und welche doch genau dieselbe Curve liefert.

§. 78. Zusatz.

Weil diese Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten einfache sind, so geben sie nur ein einziges System von Werthen, und es ist also entweder gar keine oder doch nur eine einzige Linie der 2ten Ordnung möglich, welche durch alle 5 gegebenen Punkte hindurchgeht; während auf der andern Seite durch 5 Punkte eine Linie der 2ten Ordnung auch allemal gegeben ist, so daß man nicht verlangen kann, daß solche auch noch durch einen 6ten beliebig gegebenen Punkt hindurchgehe.

§. 79. Zusatz.

Weil ferner alle Coefficienten der Gleichung:

$$y^2 + b'.xy + c'.x^2 + d'.y + e'.x + f' = 0,$$

im allgemeinen völlig bestimmt werden (einzelne Ausnahmsfälle

abgerechnet), so ist die gefundene Curve selbst völlig bestimmt, und es kann also im allgemeinen nicht verlangt werden, daß solche gerade eine Parabel, oder gerade eine Ellipse oder gerade eine Hyperbel werde.

Sind aber nur 4 Punkte gegeben, etwa B, C, D und E, so kann man verlangen, durch diese 4 Punkte eine Parabel durchzulegen. Man erhält dann außer den ersten 4 Gleichungen (1—4. §. 77.) noch die fünfte Gleichung:

$$b^2 - 4ac = 0, \quad \text{d. h.} \quad b'^2 - 4c' = 0,$$

und diese zusammen werden dann im Allgemeinen zur Bestimmung der 5 Coefficienten dienen.

Hat man aber aus den Gleichungen (1—4. §. 77.) die Coefficienten c', d', e', und f', alle in b' ausgedrückt gefunden, so ist die Gleichung in b', nehmlich $b'^2 - 4c' = 0$ quadratisch und gibt also für b' allemal zwei Werthe, die beide imaginär oder beide reell sind. Sind sie imaginär, so ist durch diese 4 gegebene Punkte keine Parabel möglich; sind sie aber reell, so gehen (wenn sonst die Werthe von c', d', e und f' nicht Null im Nenner erhalten haben) allemal zwei Parabeln durch dieselbe 4 gegebene Punkte; und nie mehr als zwei, welche beide jedoch, so oft die beiden Werthe von b' einander gleich werden, in eine einzige zusammenfallen.

§. 80. Zusatz.

Soll durch 4 Punkte B, C, D, E eine Hyperbel gelegt werden, so hat man außer den 4 Gleichungen (1 — 4. §. 77.) noch die 5te Gleichung:

$$b'^2 - 4c' = k,$$

wo man k beliebig aber positiv denkt. Durch 4 Punkte kann daher vielleicht gar keine, vielleicht können aber auch unendlich viele Hyperbeln durchgelegt werden, in so ferne k unendlich viele positive Werthe haben kann.

Und dieselben 5 Gleichungen dienen zur Bestimmung aller Ellipsen, welche durch 4 gegebene Punkte gelegt werden kön-

nen, wenn man dem k nach und nach alle mögliche negative Werthe beilegt.

Anmerkung. Dieselben Gleichungen geben aber auch wieder die durchgelegte Parabel, wenn man $k=0$ setzt.

§. 81. Zusatz.

So wie die Gleichung für die gerade Linie:

$$D.y+E.x+F=0$$

oder

$$y=-\frac{E}{D}.x-\frac{F}{D}$$

oder

$$y=A.x+B$$

nur zwei Coeffizienten, also die gerade Linie selbst zu ihrer völligen Bestimmung, nur der Bestimmung dieser beiden Coefficienten A und B, also auch nur zweier Bedingungen bedarf (etwa zwei Punkte, oder ꝛc. ꝛc. Vergl. die Beispiele zu §. 23.) so enthält die allgemeine Gleichung der Linien der zweiten Ordnung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

oder

$$y^2+b'.xy+c'.x^2+d'.y+e'.x+f'=0$$

nur 5 zu bestimmende Coefficienten, so daß also 5 Bedingungen ausreichen, um eine Linie der 2ten Ordnung völlig zu bestimmen (mithin nicht blos 5 Punkte, sondern auch 5 andere, diese ersetzenden Bedingungen.)

Note. So werden wir späterhin ersehen, daß die Kreislinie ebenfalls eine Linie der zweiten Ordnung ist und zwar zu den Ellipsen gehört; und doch bestimmen drei Punkte schon die Lage einer solchen. Allein daß die Linie, unter denen der zweiten Ordnung, gerade eine Kreislinie sey, das sind selbst zwei Bedingungen, wie wir später sehen werden, und so ist diese Linie der 2ten Ordnung als solche doch nur wiederum durch 5 Bedigungen ganz und völlig gegeben und bestimmt.

§. 82. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung; nehmlich:

1) $a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$;

außerdem noch die Gleichung für eine gerade Linie:

2) $y=\mu.x+\nu$. *)

Man soll die Coordinaten-Werthe der Durchschnittspunkte beider finden.

Auflösung. In den Durchschnittspunkten haben beide gegebene Linien dieselben Coordinaten-Werthe. Denkt man sich also unter x und y blos die Coordinaten-Werthe eines beliebigen der Durchschnittspunkte, so müssen für diese selben Werthe von x und y beide Gleichungen (1. und 2.) zugleich identisch seyn; und man findet daher dieselben Coordinaten-Werthe dieses Durchschnittspunktes, wenn man die Gleichungen (1. und 2.) nach x und y auflöst.

Eliminirt man aber y aus (1. und 2.), so erhält man:

3) $(a\mu^2+b\mu+c).x^2+(2a\mu\nu+d\mu+b\nu+e).x+$
$(a\nu^2+d\nu+f)=0$

woraus zwei Werthe von x hervorgehen, und dann zu jedem Werth von x, aus (2.), ein Werth von y. Der letztere aus (2.) gefundene Werth von y ist immer reell, **) wenn die erstern von x reell sind. Es wird also die gegebene gerade Linie (2.)

---

*) Die Buchstaben x und y in der Gleichung (1.) haben bekanntlich eine andere Bedeutung, als dieselben Buchstaben in der Gleichung (2.). — In der Gleichung (1.) bedeuten sie die Coordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der krummen Linie; in der Gleichung (2.) dagegen stellen sie die Coordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der geraden Linie vor. — Und nur in den Durchschnittspunkten (welche beiden Linien gemein sind), sind die Coordinaten-Werthe für beide Linien dieselben.

**) Man übersehe nur nicht, daß diejenigen Werthe von x und y gesucht werden, welche beiden Gleichungen (1. und 2.) zugleich genügen, so daß, wenn sich auch aus (1.) zu einem reellen Werth von x, zwei reelle Werthe für y ergeben sollten, von diesen doch nur derjenige, als der hier gesuchte betrachtet werden dürfte, welcher zugleich auch der Gleichung (2.) genügt.

die gegebene Curve (1.) in zwei verschiedenen Punkten treffen (nach E. 17.), wenn

$$(2a\mu\nu+d\mu+b\nu+e)^2>4(a\mu^2+b\mu+c)(a\nu^2+d\nu+f);$$

oder diese beide Punkte werden nur in einen einzigen zusammenfallen, wenn

$$(2a\mu\nu+d\mu+b\nu+e)^2=4(a\mu^2+b\mu+c)(a\nu^2+d\nu+f);$$

oder endlich, sie wird die Curve gar nicht treffen, wenn die beiden Werthe von x, statt reell und ungleich, oder reell und gleich zu seyn, jetzt imaginär seyn sollten.

Anmerkung 1. Für den Fall, daß die beiden Werthe von x in der Gleichung (3.) einander gleich werden, findet man

$$x=-\frac{2a.\mu\nu+d.\mu+b.\nu+e}{2(a\mu^2+b\mu+c)}=\pm\sqrt{-\frac{a\nu^2+d\nu+f}{a\mu^2+b\mu+d}}.$$

Anmerkung 2. In jedem andern Falle, wo für x zwei reelle Werthe sich ergeben, die durch x' und x'' vorgestellt seyn mögen, und wo die zugehörigen Ordinaten-Werthe der Durchschnittspunkte M und N durch y' und y'' vorgestellt sind, so daß y' und y'' aus den Gleichungen:

$$y'=\mu.x'+\nu \qquad \text{und} \qquad y''=\mu.x''+\nu$$

hervorgehen, finden sich dann die Coordinaten-Werthe des Halbirungspunktes der Linie MN nach (§. 13.) beziehlich

$$\frac{x'+x''}{2} \quad \text{und} \quad \frac{y'+y''}{2} \left(\text{d. h.} \quad \mu.\frac{x'+x''}{2}+\nu\right),$$

oder $-\frac{2a\mu\nu+d\mu+b\nu+e}{a\mu^2+b\mu+c}$ und $\frac{-a\mu^2\nu-d\mu^2-e\mu+c\nu}{a\mu^2+b\mu+c}$.

Anmerkung 3. Es kann auch in (3.) der Coefficient von x^2, nehmlich $a.\mu^2+b.\mu+c=0$ werden, d. h.

$$\mu=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{p}}{2a};$$

welches, wie man sieht, zwar nicht in der Ellipse (wo p negativ,

μ also imaginär seyn würde) aber doch in der Hyperbel und Parabel der Fall seyn kann. Für diesen Werth von μ trifft die gerade Linie $y = \mu . x + \nu$ und dann auch jede mit ihr parallele Linie (nach §. 31.) die Curve jedesmal wirklich, aber jedesmal nur in einem einzigen Punkte.

Es wird daher umgekehrt die Gleichung:

$$a . \mu^2 + b . \mu + c = 0$$

allemal den Werth von μ liefern, für welchen die gerade Linie $y = \mu . x$ und alle mit dieser parallelen Linien die Parabel oder Hyperbel nur in einem einzigen Punkte schneiden.

Und weil in der Parabel, wo $p = b^2 - 4ac = 0$ ist, μ nur einen einzigen Werth bekommt, in der Hyperbel dagegen für μ zwei solche reelle Werthe gefunden werden, so gibt es in der Parabel nur eine solche Richtung, in der Hyperbel aber deren nur zwei, so nehmlich, daß die mit ihnen parallelen geraden Linien die Curve nur in einem einzigen Punkte treffen (während alle zugleich die Curve wirklich treffen müssen). (Vgl. die Note unten zu §. 71. pag. 231. 232.).

Anmerkung 4. Uebrigens erhellet aus dem in der Auflösung der Aufgabe gefundenen Resultat, daß eine gerade Linie und eine Linie der 2ten Ordnung (Ellipse, Parabel oder Hyperbel) höchstens in zwei, nie aber in mehr als zwei Punkten sich schneiden können.

§. 83. Zusatz.

1.1) Nimmt man die gerade Linie mit der Abscissen-Axe parallel, so daß ihre Gleichung $y = \nu$ wird, so hat man $\mu = 0$, und die Gleichung (3.) zur Bestimmung der Abscissen-Werthe der Durchschnittspunkte, geht nun in

$$4) \quad c . x^2 + (b\nu + e) . x + (a\nu^2 + d\nu + f) = 0 \quad \text{über.}$$

2.2) Und will man die Durchschnittspunkte der Abscissen-Axe selbst, deren Gleichung $y = 0$ ist, mit der Linie der zwei-

ten Ordnung finden, so darf man in der Gleichung (1. §. 82.) nur 0 statt y setzen, und die zugehörigen Werthe von x finden, welche dann aus der Gleichung:

$$5)\ c.x^2+e.x+f=0$$

hervorgehen und

$$x=\frac{-e\pm\sqrt{e^2-4cf}}{2c}$$

seyn werden; wo x jetzt den Abscissen-Werth des Durchschnittspunktes vorstellt, während der Ordinaten-Werth desselben $=0$ ist.

3.3) Soll die gerade Linie $y=\mu.x+\nu$ (§. 82. n. 2.) mit der Ordinaten-Axe parallel laufen, so daß ihre Gleichung

$$x=k \quad \text{d. h.} \quad 0.y+1.x-k=0,$$

oder $y=-\frac{1}{0}.x+\frac{k}{0}$ seyn wird, so darf man nur dieser letztern Gleichung zuerst die Form geben:

$$y=-\frac{1}{m}.x+\frac{k}{m},$$

also $\mu=-\frac{1}{m}$ und $\nu=\frac{k}{m}$ setzen und nun in den Endresultaten alle Nenner m wegschaffen, zuletzt aber $m=0$ setzen, um auch für diesen Fall ein aus der Auflösung des (§. 82.) hervorgehendes und richtiges Resultat zu haben.

Es ist aber besser, weil jetzt $x=k$ ist, direkt k statt x in die Gleichung (:.) zu setzen, und dann die zugehörigen Werthe von y zu berechnen; dann ist k der Abscissen-Werth und diese dazu gefundene Werthe von y sind die Ordinaten-Werthe der Durchschnittspunkte.

4.4) Und will man die Durchschnittspunkte finden, welche die Ordinaten-Axe selbst mit der Linie der zweiten Ordnung hat, so ist ihr Abscissen-Werth $=0$; ihre Ordinaten-Werthe sind aber diejenigen Werthe von y, welche aus der Gleichung (§. 82. n. 1.) für y hervorgehen, wenn man Null statt x setzt; welche also aus der Gleichung:

$$a.y^2+d.y+f=0$$

sich ergeben,

und $$y=\frac{-d\pm\sqrt{d^2-4af}}{2a}$$

seyn werden.

§. 84. Zusatz.

Man könnte eben so gut die Durchschnittspunkte zweier Linien der 2ten Ordnung:

$$1)\ a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

und $$2)\ \alpha.y^2+\beta.xy+\gamma.x^2+\delta.y+\varepsilon.x+\zeta=0$$

aufsuchen, d. h. die Coordinaten-Werthe derselben, und man dürfte nur die beiden Gleichungen (1. und 2.) nach x und nach y auflösen, weil gerade dann, wenn unter x und y die Coordinaten-Werthe eines Durchschnittspunktes gedacht werden, die x und die y in beiden Gleichungen (1. und 2.) einen und denselben Werth haben.

Eliminirt man aber y aus (1. und 2.), so erhält man eine Eliminationsgleichung in x vom 4ten Grade, welche aufgelöst für x, entweder 4, oder 2, oder gar keinen reellen Werth liefert. Und zu jedem Werth von x findet sich dann ein einziger Werth von y; denn obgleich jede der beiden Gleichungen (1. u. 2.) zu jedem Werth von x zwei Werthe hat, so ist von diesen beiden doch allemal nur derjenige beizubehalten, welcher für diesen Werth von x beiden Gleichungen (1. und 2.) zugleich genügt.

Zwei Linien der zweiten Ordnung schneiden sich also höchstens in 4 Punkten.

§. 85. Erklärung.

Eine Gerade, welche die Linien der zweiten Ordnung in einem Punkte so trifft, daß der diesem Punkt nächstvorhergehende, und der demselben nächstfolgende Punkt (also die beiden nächstanliegenden Punkte) der Curve auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen, heißt eine Sekante oder schneidende Linie; dagegen eine Tangente oder berührende Linie, wenn dieselben beide nächstanliegende Punkte der Curve auf einer und

derselben Seite der Geraden liegen, (wie z. B. FG Fig. 31. 32. und 35.).

Trifft die schneidende Linie die Curve in zwei Punkten (wie solches in der Ellipse allemal, in der Parabel und Hyperbel aber mit einigen Ausnahmen der Fall ist), so heißt das zwischen diesen beiden Punkten liegende Stück der Geraden eine Sehne der Curve. (M. s. BC, DE Fig. 32. 35. 36.).

Anmerkung. Linien der zweiten Ordnung können sich ebenfalls einander berühren; wenn man die vorstehende Definition für diesen Fall ausdehnt; dann heißt jede die Tangente der andern.

§. 86. Zusatz.

Ist in der Gleichung für die Linie der zweiten Ordnung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

der erste Coefficient $a=0$, also die Gleichung aufgelöst,

$$y=-\frac{c.x^2+e.x+f}{b.x+d},$$

so gehört (Fig. 36.) zu jedem reellen Werth von x allemal wirklich ein reeller Werth von y, aber nur ein einziger. In diesem Falle wird also die Ordinaten-Linie nie eine Sehne bilden können; aber eben so wenig kann die Ordinaten-Linie in diesem Falle je eine Tangente werden, weil zu jedem nächst größern und auch zu jedem nächst kleinern Werth von x, eben so gut ein reeller Werth von y existirt, als für irgend einen beliebig gedachten Werth von x selbst, so daß also, welchen Punkt der Curve man betrachtet, zunächst links und rechts, also auf beiden Seiten der Ordinaten-Linie dieses Punktes, immer wieder ein Punkt der Curve liegt. Man vergl. für diesen Fall (Fig. 35. und 36.), wo YAY′ die Ordinaten-Axe ist.

Ist aber nicht $a=0$, so gibt die Gleichung für die Curve, wenn man sie auflöst:

$$y=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a},$$

wo $p=b^2-4ac$, $q=bd-2ae$ und $r=d^2-4af$, und es gehören nun zu jedem reellen Werth von x, zwei Werthe von y, die entweder beide reell und ungleich, oder reell und gleich, oder beide imaginär sind, je nachdem für diesen Werth von x,

$$p.x^2+2q.x+r$$

positiv, Null oder negativ ist.

Es läßt sich nun zeigen, daß die Ordinaten-Linie, welche zu denjenigen Werthen von x gehört, deren zugehörigen Ordinaten-Werthe einander gleich und reell sind, nothwendig eine Tangente der Curve seyn müsse. — Denn die Werthe von $p.x^2+2q.x+r$ gehen vom positiven durch Null zum negativen über, für stetig auf einander folgende Werthe von x, 1) in der Parabel wo $p=0$, 2) in der Ellipse wo allemal $q^2>pr$ ist (§. 66.), dagegen 3) in der Hyperbel nur dann, wenn $q^2>pr$ ist, nicht mehr aber, wenn $q^2<pr$, weil dann, in so ferne überdies p positiv ist, der Ausdruck:

$$p.x^2+2q.x+r$$

nach (E. 20.), beständig positiv bleibt, nie Null und nie negativ wird, mithin die zugehörigen Werthe von y allemal reell sind. — So wie aber $px^2+2qx+r$ vom positiven durch Null zum negativen übergeht, für stetig auf einander folgende Werthe von x, so sind die zugehörigen Ordinaten-Werthe (von y) reell und ungleich, dann reell und gleich, dann imaginär.

Folglich ist die Ordinaten-Linie einmal eine Sehne, dann eine Linie, auf deren anderer Seite kein Punkt der Curve mehr liegt, während sie selber die Curve nur noch in einem einzigen Punkte trifft. Eine solche Linie nannten wir aber Tangente der Curve.

Zugleich erhellet aus dieser Zergliederung, daß, wenn die Axen eine solche Lage haben, für welche in der Gleichung der Curve:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

der Coefficient a nicht Null ist, daß dann in der Ellipse und

Parabel allemal Tangenten existiren, parallel mit der Ordinaten-Axe; in der Hyperbel aber nur dann, wenn $q^2 > pr$ ist; während, wenn $q^2 < pr$ seyn sollte, alle Ordinaten-Linien die Hyperbel wirklich treffen und jedesmal Sehnen bilden. (Vergl. Fig. 31. 32. und 35, und in letzterer Beziehung noch Fig. 36., wenn man UAU′ als Abscissen-Axe und VAV′ zur Ordinaten-Axe nimmt.)

§. 87. Zusatz.

Auch geht aus dieser Untersuchung noch hervor, daß, wenn man in einer Linie der 2ten Ordnung mehre mit einander parallele, die Curve treffende Linien zieht, und eine darunter eine Sehne bildet, die übrigen alle Sehnen oder Tangenten seyn müssen. — Denn man kann eine neue Ordinaten-Axe einführen parallel mit diesen Linien, so daß letztere Ordinaten-Linien werden, und von diesen ist das behauptete aus (§. 86.) hervorgegangen.

Unter allen mit einander parallelen Linien, wird man daher die Tangente sogleich daran erkennen, daß sie die Curve nur in einem einzigen Punkte trifft (Fig. 31. 32. 35.), die übrigen sie aber in zwei Punkten schneiden.

§. 88. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung:

$$1)\quad a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0,$$

wo a nicht Null seyn soll, auf irgend Axen bezogen, welche in ihrer ersten Region den Winkel φ bilden. Man soll die Abscissen-Werthe angeben, deren zugehörige Ordinaten-Linien Tangenten der Curve sind.

Auflösung. Aus (1.) erhält man:

$$2)\quad y = \frac{-(b.x + d) \pm \sqrt{p.x^2 + 2q.x + r}}{2a},$$

und da für die Tangente diese beiden Werthe von y einander

gleich werden müssen, so müssen die gesuchten Abscissen-Werthe, statt x gesetzt den Radikanden:

$$3)\quad p.x^2+2q.x+r=0$$

machen. Löst man daher diese Gleichung nach x auf, so erhält man

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-pr}}{p},$$

und man findet also jedesmal wirklich zwei solche Abscissen-Werthe, also zwei Tangenten in der Richtung der Ordinaten-Axe (Fig. 31. und 32. wenn in Fig. 32. ZAZ' zur Ordinaten-Axe genommen ist), oder gar keine, je nachdem $q^2>pr$ oder $q^2<pr$ ist. Das letztere kann nur in der Hyperbel seyn (nach §. 66.), so daß die Ellipse allemal zwei parallele Tangenten hat.

In der Parabel, wo $p=0$ ist, reducirt sich die Gleichung (3.) auf

$$4)\quad 2q.x+r=0 \quad \text{oder} \quad x=-\frac{r}{2q};$$

und die Parabel hat also in der Richtung (d. h. parallel mit) der Ordinaten-Axe allemal nur eine einzige Tangente (auch wenn, wie dies voraus gesetzt worden, a nicht Null ist; denn wenn $a=0$ ist, existirt ohnehin gar keine Tangente in der Richtung (d. h. parallel mit) der Ordinaten-Axe, nach §. 86.).

Anmerkung. Wird aber x so gedacht, daß $p.x^2+2q.x+r$ zu Null wird, so wird, mag p Null oder nicht Null seyn, wenn nur im letztern Falle $q^2>pr$ ist, derselbe Ausdruck $p.x^2+2q.x+r$ für die beiden nächstangrenzenden Werthe von x, für den einen positiv und für den andern nothwendig dann negativ, also die zugehörigen Werthe von y für den einen reell, für den andern aber nothwendig imaginär. Es ist daher die mit der Ordinaten-Axe parallele Tangente allemal zugleich die Grenz-Ordinate der Curve, so daß auf einer Seite derselben unmittelbar an ihr keine Punkte der Curve

mehr liegen; wie solches übrigens auch schon in dem bloßen Begriff der Tangente enthalten ist. (§. 85.).

§. 89. Aufgabe.

Es ist gegeben eine beliebige Linie der zweiten Ordnung durch die Gleichung:

$$1)\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

auf einen beliebig gegebenen Axen-Winkel φ bezogen. Man soll die Gleichung für die gerade Linie finden, welche diese Curve an dem Punkte berührt, dessen Abscissen-Werth vorzugsweise durch x vorgestellt seyn mag, so daß sein Ordinaten-Werth durch das in (1.) gegebene y vorgestellt wird.

Auflösung. Es stellt

$$2)\quad y_1=\mu.x_1+\nu$$

jede gerade Linie vor, also auch die verlangte Tangente, wenn μ und ν den Bedingungen der Aufgabe gemäß bestimmt werden. Weil aber nach (§. 87.) die Tangente daran erkannt wird, daß die beiden Durchschnittspunkte derselben mit der Curve in einen einzigen zusammenfallen, so darf man nur nach (§. 82.) die Abscissen-Werthe dieser Durschnittspunkte der Linie $y_1=\mu.x_1+\nu$ finden, und diese einander gleich setzen. Es sind aber nach (§. 82.) diese Werthe einander gleich, wenn

$$3)\quad (2a\mu\nu+b\nu+d\mu+e)^2=4(a\mu^2+b\mu+c)(a\nu^2+d\nu+f)$$

ist, während, weil die Tangente $y_1=\mu.x_1+\nu$ durch den Punkt (x, y) durchgehen muß, auch noch

$$4)\quad y=\mu.x+\nu \quad\text{oder}\quad \nu=y-\mu.x$$

seyn wird. Und diese beiden Gleichungen geben nun die beiden Unbekannten μ und ν. Eliminirt man nehmlich ν, so erhält man zur Bestimmung von μ:

$$5)\quad (p.x^2+2q.x+r).\mu^2-$$
$$2[(px+q).y+(be-2cd).x-(de-2bf)].\mu$$
$$+[p.y^2+2(be-2cd).y+e^2-4cf]=0,$$

wo x und y gegebene Ziffernwerthe sind, durch den gegebenen Punkt, an welchem die Tangente die Curve berühren soll, bestimmt.

Ist also $y_1 = \mu . x_1 + \nu$ die Gleichung für die Tangente, so muß dieser Coefficient μ der Gleichung (5.) genügen. Umgekehrt folgt daraus: unter den beiden Werthen, welche sich aus (5.) für μ ergeben, muß derjenige enthalten seyn, welcher die Tangente gibt.

Weil dies jedoch zu mühsamen Rechnungen führt, so suche man lieber nach (§. 82.) die Abscissen-Werthe x für die Durchschnittspunkte, unter der Voraussetzung, daß sie beide einander gleich sind, und man findet dann:

$$6)\quad x = -\frac{2a\mu\nu + d\mu + b\nu + e}{2(a\mu^2 + b\mu + c)}.$$

Und weil hier x gegeben ist, so darf man nur die Gleichungen (6 und 4.) in Verbindung nehmen und sie nach μ und ν auflösen, um die gesuchten Werthe für μ und ν zu haben. Dann erhält man aber sogleich:

$$7)\quad \mu = -\frac{b.y + 2c.x + e}{2a.y + b.x + d};$$

und daher ist die Gleichung für die gesuchte Tangente, wenn man in (2.) für μ und ν die gefundenen Werthe substituirt, und wenn x_1 und y_1 die Coordinaten-Werthe ihrer einzelnen Punkte vorstellen:

$$y_1 = \mu . x_1 + (y - \mu x) \quad \text{oder} \quad y_1 - y = \mu . (x_1 - x),$$

$$\text{oder}\quad 8)\quad y_1 - y = -\frac{b.y + 2c.x + e}{2a.y + b.x + d} . (x_1 - x).$$

§. 90. Zusatz.

Ist x irgend ein Abscissen-Werth, so ist $x + h$ der nächstfolgende oder der nächstvorhergehende, je nachdem h positiv oder negativ, wenn nur jedesmal im Moment des Verschwindens gedacht wird. Stellt nun $y_{1(x)}$ die Ordinate der Tangente und $y_{(x)}$ die Ordinate der Curve vor, welche beide zu der Abscisse x

gehören; und bezeichnet man durch $y_{1(x+h)}$ und $y_{(x+h)}$ die Ordinaten der Tangente und der Curve, welche zu der Abscisse $x+h$ gehören, also die nächst anliegenden Ordinaten der Curve und der Tangente, so muß nach der (§. 85.) gegebenen Definition, (nach welcher auf beiden Seiten des Berührungspunktes die Punkte der Tangente beide über oder beide unter der Curve seyn müssen)

1) $y_{1(x)}=y_{(x)}$ und 2) $y_{1(x+h)}-y_{(x+h)}$

allemal positiv oder allemal negativ seyn, man mag h positiv oder negativ nehmen, wenn nur jedesmal im Moment des Verschwindens.

Wird nun die Gleichung der Tangente durch

$$3)\quad y_1=\mu.x_1+\nu$$

vorgestellt, die Gleichung der Curve dagegen auf die Form:

$$4)\quad y=-\frac{(bx+d)\pm\sqrt{px^2+2qx+r}}{2a}$$

gebracht, so hat man:

$$5)\quad y_{1(x)}=\mu.x+\nu,$$

$$6)\quad y_{(x)}=\frac{-(b.x+d)\pm\sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a}=y,$$

in so ferne y als gegeben betrachtet wird. Also wird die Gleichung (1.) jetzt folgende:

$$7)\quad \mu.x+\nu=y \quad \text{oder} \quad \nu=y-\mu.x.$$

Ferner ist

$$8)\quad y_{1(x+h)}=\mu.(x+h)+\nu=(\mu x+\nu)+\mu h=y+\mu h,$$

$$y_{(x+h)}=-\frac{b.(x+h)+d}{2a}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2a}\sqrt{p.(x+h)^2+2q.(x+h)+r},$$

d. h., wenn man nach (E. 43.) in eine unendliche Reihe verwandelt, welche nach ganzen Potenzen von h fortschreitet:

$$9)\ y_{(x+h)} = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{p.x^2+2q.x+r}}{2a} +$$

$$+ \frac{-b\sqrt{px^2+2qx+r} \pm (px+q)}{2a\sqrt{px^2+2qx+r}}.h + \mathfrak{C}.h^2 + \mathfrak{D}.h^3 + \ldots$$

wo wir, der Kürze wegen, die folgenden Coefficienten der Reihe durch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. bezeichnen, und wo nach (6.) das erste Glied nichts weiter ist als y. Es ist daher nun

$$10)\ y_{1(x+h)} - y_{(x+h)} =$$

$$= \left(\mu - \frac{-b\sqrt{px^2+2qx+r} \pm (px+q)}{2a\sqrt{px^2+2qx+r}}\right)h - \mathfrak{C}.h^2 - \mathfrak{D}.h^3 \text{ etc.}$$

Nun soll aber diese Differenz allemal positiv seyn oder allemal negativ, man mag h positiv oder negativ nehmen, wenn nur jedesmal im Moment des Verschwindens. Und da dies nach (E. 46 — 48.), nicht der Fall seyn kann, wenn die Reihe mit h^1 anfängt, weil dann das erste Glied und somit, für ein im Moment des Verschwindens gedachtes h, auch die Summe der ganzen Reihe, ihr (+) oder (—) Zeichen mit h zugleich ändert, so muß hier der Coefficient von $h=0$ seyn, also:

$$11)\ \mu = \frac{-b\sqrt{p.x^2+2q.x+r} \pm (p.x+q)}{2a\sqrt{p.x^2+2q.x+r}} =$$

$$= \frac{-b + \frac{p.x+q}{\pm\sqrt{p.x^2+2q.x+r}}}{2a},$$

wenn (3.) die Gleichung der Tangente seyn soll. Und wenn also μ diesen Werth (11.) hat, so ist $y_1 = \mu.x_1 + (y - \mu x)$,

d. h. $$12)\ y_1 - y = \mu.(x_1 - x)$$

die Gleichung für die gesuchte Tangente; so daß also hiermit eine zweite Auflösung der Aufgabe des vorgehenden (§. 89.) gegeben ist.

Anmerkung 1. Der zuletzt gefundene Werth von μ

(§. 90. n. 11.) läßt sich auf den zuerst im (§. 89.) gefundenen zurückführen. Es folgt nehmlich aus (§. 90. n. 4.)

$$\pm\sqrt{px^2+2qx+r}=2ay+bx+d.$$

Setzt man aber diesen Werth statt derselben Wurzel in (§. 90. n. 11.) so ergibt sich

$$\mu=\frac{-b+\frac{p.x+q}{2a.y+b.x+d}}{2a}=$$

$$=\frac{-2ab.y-b^2.x-bd+(b^2-4ac).x+bd-2ae}{2a(2a.y+b.x+d)}$$

$$=-\frac{b.y+2c.x+e}{2a.y+b.x+d},$$

welches derselbe zuerst gefundene Werth ist.

Anmerkung 2. Es ist 1) $y_1-y=\mu.(x_1-x)$, welchen reellen Werth man auch immer statt μ setzen möge, allemal die Gleichung für eine gerade Linie, welche durch den Punkt (x, y) hindurchgeht. Man kann nun unter allen durch die Gleichung (1.) vorgestellten geraden Linien, diejenige suchen, welche in ihren, dem Punkt (x, y) nächstanliegenden Punkten, der Curve am nächsten kommt; und da muß dann der Unterschied: $y_{1(x+h)}-y_{(x+h)}$ oder die Reihe, welche nach (§. 90. n. 10.) diesem Unterschiede gleich ist, der kleinste werden, welches nur dann der Fall ist, wenn das erste Glied dieser Reihe Null wird, die Reihe selbst also mit h^2 anfängt, in so ferne nach (E. 46.) Ah größer ist, (so klein man auch A sich denken möge) als die Summe einer ganzen Reihe, die aber mit h^2 anfängt. Man erhält also für diese Aufgabe dieselbe gerade Linie, wie für die vorige, und wir erkennen daraus, daß die Tangente der Linie der zweiten Ordnung zu gleicher Zeit in den dem Punkte (x, y) nächstanliegenden Punkten, der Curve näher kommt, als jede andere durch denselben Punkt (x, y) hindurchgehende gerade Linie.

Anmerkung 3. Man konnte daher die Gleichung für die Tangente auch noch dadurch finden, daß man durch den gegebenen Punkt (x, y) der Curve, neue Axen legt parallel mit den alten, so daß die alten Coordinaten-Werthe $t+x$ und $u+y$ werden, wenn t und u die neuen sind. Die Gleichung für die Curve wird dann nach (§. 69.) die Form annehmen:

$$1)\quad A.u^2+B.tu+C.t^2+D.u+E.t=0,$$

weil für $t=0$ auch $u=0$ werden, also $F=0$ seyn muß. Da nun für Punkte, die ganz nahe an dem neuen Anfangspunkt liegen, t und u nicht ganz Null, aber doch sehr klein sind, so sind in der Gleichung (1.) $D.u+E.t$ die bedeutendsten Glieder, so daß, wenn man

$$2)\quad D.u_1+E.t_1=0$$

nimmt, dies die Gleichung seyn wird für eine gerade Linie, welche in den dem Anfangspunkte zunächst liegenden Punkten, mit der durch (1.) gegebenen Curve am nächsten kommen wird. Also ist die Gleichung (2.) die Gleichung für die Tangente, auf die neuen Axen bezogen; und weil, wenn x_1 und y_1 die alten Coordinatenwerthe derselben Punkte vorstellen, allemal $t_1=x_1-x$ und $u_1=y_1-y$ seyn muß, nach (§.§. 7 — 9.), so wird dieselbe Gleichung auch so geschrieben werden können:

$$3)\quad D.(y_1-y)+E.(x_1-x)=0$$

$$\text{oder}\quad y_1-y=-\frac{E}{D}(x_1-x);$$

und dies wird also die Gleichung der Tangente seyn, auf die alten Axen bezogen, so daß für $-\frac{E}{D}$ dasselbe sich ergeben wird, was sich vorher für μ ergeben hat.

Es ist jedoch diese letztere Weise zu schließen nicht ganz bindend zu nennen.

Anmerkung 4. Die für die Tangente gefundene Gleichung:

$$y_1=\mu.x_1+\nu \quad\text{oder}\quad y_1-y=\mu.(x_1-x),$$

wo $\mu = -\frac{b}{2a} \pm \frac{p.x+q}{2a\sqrt{px^2+2qx+r}} = -\frac{b.y+2c.x+e}{2a.y+b.x+d}$

ist, gibt wiederum zu mehren Betrachtungen Anlaß.

I. Ist nehmlich der Nenner $2a.y+b.x+d=0$ und nicht zugleich der Zähler $b.y+2c.x+e$ der Null gleich, so ist $\frac{1}{\mu}=0$, und die Gleichung $y_1=\mu.x_1+\nu$, oder

$y_1-y=\mu.(x_1-x)$, welche umgeformt $x_1-x=\frac{1}{\mu}(y_1-y)$

gibt, reducirt sich nun auf $x_1-x=0$ oder auf $x_1=x$; d. h. die Tangente ist dann parallel mit der Ordinaten-Axe. Derselbe Satz gilt auch umgekehrt, so daß also der Berührungspunkt (x, y) der mit der Ordinaten-Axe parallelen Tangente, allemal zugleich der Gleichung $2a.y+b.x+d=0$ genügt, also ein Punkt ist in der geraden, durch die Gleichung $2a.y_2+b.x_2+d=0$ gegebenen Linie, wenn nehmlich x_2 und y_2 die Coordinaten-Werthe aller einzelnen Punkte dieser geraden Linie vorstellen.

II. Ist aber $a=0$, so muß die ganze Aufgabe, die Gleichung der Tangente zu finden, sogleich von vorne herein, für $a=0$ besonders gelöset werden; und gewährt solche dann weiter keine Schwierigkeit.

III. Ist $p.x^2+2q.x+r=0$, so wird abermals $\mu=\frac{1}{0}$, $\frac{1}{\mu}=0$, und die Gleichung für die Tangente ist abermals $x_1-x=0$, die Tangente selbst also parallel mit der Ordinaten-Axe. So oft aber $p.x^2+2q.x+r=0$ ist, so oft werden die beiden Werthe von y einander gleich; welches mit den (§.§. 86. 87.) wiederum übereinstimmt.

§. 91. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung für eine Linie der 2ten Ordnung:

1) $a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$;

und noch die Gleichung für eine gerade Linie:

$$2)\quad y = a_2 : x + b_2,$$

beide auf Axen bezogen, welche in ihrer ersten Region einen beliebig gegebenen Winkel φ mit einander bilden. Man soll die Gleichung finden, für diejenige Tangente der Curve, welche mit der gegebenen geraden Linie (2.) parallel läuft.

Auflösung. Wird die gesuchte Gleichung der Tangente durch

$$3)\quad y = \mu . x + \nu$$

ausgedrückt, so muß erstlich nach (§. 31.) $\mu = a_2$ seyn. Und weil die beiden Durchschnittspunkte der Tangente (3.) mit der Curve (1.) in einen einzigen zusammen fallen sollen, so hat man noch nach (§. 82.):

$$[(2a . a_2 + b) . \nu + (d . a_2 + e)]^2 = 4(a . a_2^2 + b . a_2 + c)(a . \nu^2 + d . \nu + f)$$

d. h. $$4)\quad p . \nu^2 - 2(q . a_2 - (be - 2cd)) . \nu + (r . a_2^2 + 2(de - 2bf) . a_2 + (e^2 - 4cf)) = 0,$$

woraus sich für μ, so lange nicht $p = 0$ ist, zwei Werthe ergeben, so daß also in der Ellipse und in der Hyperbel immer zwei Tangenten gefunden werden, in der Parabel aber nur eine einzige, welche der gegebenen Bedingung entsprechen.

Anmerkung 1. Man kann dieselbe Aufgabe auch so lösen:

Weil nach (§. 89.)

$$1)\quad y_1 - y = -\frac{by + 2cx + e}{2ay + bx + d} \cdot (x_1 - x)$$

die Gleichung ist für die Tangente, welche die Curve an dem Punkt (x, y) berührt, diese Tangente aber dasmal mit

$$2)\quad y = a_2 . x + b_2$$

parallel laufen soll, so muß nach (§. 31.):

$$3)\quad -\frac{b.y+2c.x+e}{2a.y+b.x+d}=a_2$$

oder $$(2a.a_2+b).y+(b.a_2+2c).x+(d.a_2+e)=0$$

seyn, und diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung:

$$4)\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0,$$

welche für dieselben Coordinaten-Werthe (x, y) identisch werden muß, gibt nun die Werthe für x und für y, d. h. die Coordinaten-Werthe des Berührungspunktes; so daß dann

$$5)\quad y_2-y=a_2.(x_2-x)$$

die Gleichung ist für die gesuchte Tangente, unter x_2 und y_2 die Coordinaten-Werthe ihrer einzelnen Punkte verstanden.

§. 91.* Zusatz.

Man könnte eben so auch die Aufgabe stellen: durch einen gegebenen Punkt (α, β) außerhalb der Curve eine Tangente an die Curve des (§. 91.) zu legen. Man hat aber in (§. 89.) die Gleichung für die Tangente in dem Punkte (x, y). Denkt man sich nun x noch ganz unbestimmt, so kann man solchen Werth noch so bestimmen, daß die Tangente durch den gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht; und es muß daher seyn

$$1)\quad \beta-y=-\frac{by+2cx+e}{2ay+bx+d}.(\alpha-x),$$

welche Gleichung in Verbindung mit der Gleichung der Curve:

$$2)\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

die gesuchten Werthe x und y des Berührungspunktes liefert. Dann hat man aber zwei gegebene oder bekannte Punkte (α, β) und (x, y) und die Gleichung für die durch sie hindurchgehende gerade Linie ist dann nach (§. 23.) bestimmt.

§. 92. Aufgabe.

Es ist eine Linie der 2ten Ordnung durch die Gleichung:

$$1)\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

gegeben, welche sich auf Axen bezieht, die in ihrer ersten Region einen beliebig gegebenen Winkel φ mit einander bilden. Man soll die Gleichung finden der Linie, welche durch die Halbirungspunkte aller mit der Ordinaten-Axe parallelen Sehnen hindurchgeht oder vielmehr, welche von diesen Halbirungspunkten selber gebildet wird.

Auflösung. Wird die Gleichung (1.) nach y geordnet, so erhält man:

$$2)\quad y^2+\frac{b.x+d}{a}.y+\frac{c.x^2+e.x+f}{a}=0;$$

und es hat also y für jeden Werth von x, 2 Werthe, welche durch y' und y'' vorgestellt seyn mögen.

Nun ist nach (E. 19.):

$$3)\quad y'+y''=-\frac{b.x+d}{a},$$

und nach (§. 13.), wenn y der zu x gehörige Ordinaten-Werth des Halbirungspunktes der Sehne ist:

$$4)\quad y=\frac{y'+y''}{2};$$

also aus (3. und 4.):

$$y=-\frac{bx+d}{2a}=-\frac{b}{2a}.x-\frac{d}{2a},$$

oder $$5)\quad 2a.y+b.x+d=0$$

die gesuchte Gleichung zwischen einem beliebigen Abscissen-Werth x, und seinem zugehörigen Ordinaten-Werth des Halbirungspunktes der Sehne.

§. 93. Zusatz.

Da diese Gleichung:

$$2a.y+b.x+d=0,$$

die Gleichung ist für eine gerade Linie, so halbirt also eine und dieselbe gerade Linie alle mit der Ordinaten-Axe parallele Seh-

nen; und weil dieselbe Curve auf ganz beliebig gegebene Axen bezogen werden kann, und ihre Gleichung nach (§. §. 63. u. 69.) allemal dieselbe Form erhält, nehmlich:

$$A.u^2+B.tu+C.t^2+D.u+E.t+F=0,$$

so wird für jede beliebige Richtung der neuen Ordinaten-Axe allemal eine gerade Linie gefunden werden, welche alle mit dieser Richtung parallele Sehnen zugleich halbirt, die einzige ausgenommen, für welche $A=0$ wird (welches nach (§. 86.) in der Parabel und Hyperbel nicht aber in der Ellipse der Fall seyn kann) und in welcher es in dieser Richtung gar keine Sehnen gibt.

§. 94. Erklärung.

Eine gerade Linie, welche in einer Linie der 2ten Ordnung alle mit einander parallele Sehnen halbirt, heißt Durchmesser der Curve. Der Abstand zwischen den beiden Punkten, in welchen dieser die Curve trifft, heißt seine Länge. Die parallelen Sehnen, welche der Durchmesser alle halbirt, heißen seine zugehörigen Sehnen.

§. 95. Zusatz.

Um die Coordinaten-Werthe x' und y' der Endpunkte desjenigen Durchmessers zu finden, welcher alle mit der Ordinaten-Axe parallele Sehnen halbirt, hat man die Gleichungen:

1) $a.y'^2+b.x'.y'+c.x'^2+d.y'+e.x'+f=0$

und 2) $2a.y'+b.x'+d=0.$

Löst man aber diese beiden Gleichungen nach x und nach y auf, so erhält man genau dieselben beide Werthe für x, welche (§. 88.) als Abscissen-Werthe der mit der Ordinaten-Axen parallelen Tangenten gefunden worden sind.*) — Also halbirt die-

*) Um diese beide Gleichungen leichter aufzulösen, multiplicirt man die (2.) mit y' und subtrahirt das Resultat von (1.) und erhält dann:

ser Durchmesser nicht bloß alle mit der Ordinaten-Axe parallele Sehnen, sondern er geht auch durch die Berührungspunkte der mit denselben Sehnen parallelen Tangenten.

Und auch dies gilt wieder für jede Richtung der Sehnen und der mit ihr parallelen Tangenten, weil die Gleichung der Curve auf beliebige andere Axen bezogen immer noch dieselbe Form behält, also für jede andere Lage der Ordinaten-Axe derselbe Schluß immer wiederholt werden kann.

Die Tangenten an den Endpunkten des Durchmessers heißen auch seine zugehörigen Tangenten.

Anmerkung 1. Da für die mit der Ordinaten-Axe parallelen Sehnen, also überhaupt für parallele Sehnen jedesmal nur ein Durchmesser gefunden worden ist, so bildet dieser mit diesen Sehnen einen bestimmten Winkel, so daß also jeder Durchmesser seine zugehörigen Sehnen unter einem bestimmten Winkel halbirt, und im Allgemeinen jedes andere System paralleler Sehnen von dem zugehörigen Durchmesser unter einem andern Winkel halbirt werden kann.

---

3) $a.y'^2 = c.x'^2 + e.x' + f.$

Und aus (2.): $y' = -\frac{b.x' + d}{2a}.$

Setzt man daher diesen letztern Werth statt y' in die (3.), so erhält man:

$$p.x'^2 + 2q.x' + r = 0 \quad \text{und} \quad x' = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - pr}}{p},$$

wenn $p = b^2 - 4ac$, $q = bd - 2ae$ und $r = d^2 - 4af$ ist.

Oder auch so: man weiß daß die Gleichung (1.) aufgelöst dieses Resultat:

$$y' = -\frac{b.x' + d}{2a} \pm \frac{\sqrt{p.x'^2 + 2qx' + r}}{2a}$$

liefert. Da nun vermöge der Gleichung (2.)

$$y' = -\frac{b.x' + d}{2a}$$

ist, so bleibt, wenn man die untere Gleichung von der obern subtrahirt,

$$\pm\frac{\sqrt{p.x'^2 + 2q.x' + r}}{2a} = 0 \quad \text{d. h.} \quad p.x'^2 + 2q.x' + r = 0$$

zur Bestimmung von x' übrig.

Anmerkung 2. In der (Anmerk. 4. §. 90.) haben wir übrigens schon gesehen, daß die Berührungspunkte der mit der Ordinaten-Axe parallelen Tangenten, Punkte sind der, durch die Gleichung:

$$2a.y_2+b.x_2+d=0 \quad \text{oder} \quad 2a.y+b.x+d=0$$

gegebenen geraden Linie, als unsers jetzigen, alle mit der Ordinaten-Axe parallelen Sehnen, zugleich halbirenden Durchmessers.

Note. Man konnte solches auch daraus vermuthen, daß die Sehne, je näher sie der Tangente rückt, desto kleiner wird, daß also die beiden Endpunkte der Sehne einander immer näher und näher rücken, je näher die Sehne der Tangente kommt, während sie zuletzt in einem einzigen Punkt zusammenfallen, welcher der Berührungspunkt der Tangente ist. Da nun der Durchmesser, so nahe auch die Punkte der Sehne an einander schon gerückt seyn mögen, doch immer in der Mitte zwischen beiden durchgeht, so scheint sie in dem Moment, wo beide Endpunkte der Sehne in den Berührungspunkt zusammenfallen, ebenfalls mit demselben zusammentreffen zu müssen.

§. 96. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung einer Linie der 2ten Ordnung:

1) $a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$,

und noch die Gleichung einer beliebigen geraden Linie:

2) $y=a_2.x+b_2$.

Man soll die Gleichung finden für den Durchmesser, welcher alle mit der Geraden (2.) parallele Sehnen halbirt.

Auflösung. Um diese Aufgabe zu lösen kann man wiederum mehre Wege betreten. Entweder man kann die gegebene gerade Linie, oder bequemer noch die mit ihr parallele und durch den alten Anfangs-Punkt hindurchgehende:

3) $y=a_2.x$

zur neuen Ordinaten-Axe nehmen, die alte Abscissen-Axe beibehalten, und die Gleichung finden für dieselbe Curve auf diese neue Axen bezogen:

4) $A.u^2+B.tu+C.t^2+D.u+E.t+F=0$,

wo nach (§. 70.), wenn $\sqrt{1+a_2^2+2a_2.cos\varphi}=\alpha_2$ ist,

$$A=\frac{a.a_2^2+b.a_2+c}{\alpha_2^2},\quad B=\frac{b.a_2+2c}{\alpha_2^2},\quad C=c,$$

$$D=\frac{d.a_2+e}{\alpha_2^2},\qquad E=e,\quad F=f$$

seyn wird, während

$$x=\frac{1}{\alpha_2}.u+t \quad \text{und} \quad y=\frac{a_2}{\alpha_2}.u,$$

so wie $u=\frac{\alpha_2}{a_2}.y$ und $t=-\frac{1}{a_2}.y+x$ seyn muß; und dann wird man nach (§. 91.)

5) $2A.u+B.t+D=0$

für die Gleichung des gesuchten Durchmessers nehmen, wo u und t die neuen Coordinaten-Werthe der einzelnen Punkte dieses Durchmessers sind.

Weil man aber eigentlich die Gleichung des Durchmessers auf die alten Axen bezogen verlangt hat, so muß man nach (§. 62.) diese Gleichung (5.) wiederum auf die alten Axen beziehen; und man erhält dann, wenn y_1 und x_1 die alten Coordinaten-Werthe der einzelnen Punkte desselben Durchmessers vorstellen, vermöge der nach (§. 52.) nun statt findenden Gleichungen:

$$u=\frac{\alpha_2}{a_2}.y_1 \quad \text{und} \quad t=-\frac{1}{a_2}.y_1+x_1,$$

nachstehende Gleichung:

6) $(2a.a_2+b).y_1+(b.a_2+2c).x_1+(d.a_2+e)=0$

für den gesuchten Durchmesser, wenn x_1 und y_1 die auf die alten Axen bezogenen Coordinaten-Werthe seiner einzelnen Punkte vorstellen.

Anmerkung 1. Einen andern Weg zur Auflösung derselben Aufgabe betritt man, wenn nach (§. 91.) die Gleichung der mit der gegebenen Geraden $y=a_2.x+b_2$ parallelen Tangenten, daraus die Coordinaten-Werthe der beiden Berührungspunkte gesucht werden, und wenn dann nach (§. 23.) die Gleichung für die Gerade, welche durch diese beiden Berührungspunkten hindurchgeht und welche der gesuchte Durchmesser seyn muß, genommen wird. *)

Man kann aber auch die Gleichungen nehmen für 2 beliebige mit $y=a_2.x+b_2$ parallele, die Curve wirklich schneidende Linien; dann die Coordinaten-Werthe der Halbirungspunkte der Sehnen nach (§. 82. Anmerk. 2.), um endlich nach (§. 23.) die Gleichung finden zu können, für den durch diese Halbirungspunkte gegebenen Durchmesser.

Oder endlich, man kann nach (§. 91.) einen Berührungspunkt und nach (§. 82. Anmerk. 2.) einen Halbirungspunkt finden, und dann nach (§. 23.) durch diese beide, den Durchmesser legen.

Anmerkung 2. Weil die Gleichung:

$$y=a_2.x+b_2$$

jede mögliche gerade Linie, in jeder möglichen Richtung gegen die Axen vorstellt, so wird die Gleichung (6.):

$$(2a.a_2+b).y_1+(b.a_2+2c).x_1+(d.a_2+e)=0$$

jeden möglichen Durchmesser liefern, wenn man nur dem a_2 alle mögliche reelle Werthe beilegt.

---

*) Dieser Weg ist offenbar nur bei der Ellipse und Hyperbel anwendbar, weil die Parabel nur einen einzigen solchen Berührungspunkt liefert. Dagegen gibt derselbe Weg die gesuchte Gleichung für den Durchmesser aus (§. 91. Anmerkung.) geradezu, ohne alle Rechnung. Weil nehmlich die dortige Gleichung (3.) identisch wird, wenn x und y die Coordinaten-Werthe der Durchschnittspunkte des Durchmessers mit der Curve, also zweier Punkte des Durchmessers sind, so muß dieselbe Gleichung identisch werden, wenn x und y die Coordinaten-Werthe aller übrigen Punkte des Durchmessers vorstellen, d. h. sie selbst ist die Gleichung des Durchmessers.

§. 97. Zusatz.

Wird aber der Winkel ψ gesucht, unter welchem der Durchmesser seine Sehnen halbirt, so sucht man den Winkel, welchen die durch die Gleichungen:

$$1)\quad y = a_2 . x$$

und

$$2)\quad y = -\frac{b . a_2 + 2c}{2a . a_2 + b} . x$$

gegebenen Geraden mit einander bilden, in so ferne die (1.) mit den Sehnen, die (2.) dagegen mit dem zugehörigen Durchmesser parallel bleibt. Und es findet sich nach (§. 34.):

$$3)\quad \cos\psi = \frac{2a . a_2 + b - (b . a_2 + 2c) . a_2 + 2(a . a_2^2 - c) . \cos\varphi}{\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi} . \sqrt{(2a . a_2 + b)^2 + (b . a_2 + 2c)^2 - 2(2aa_2 + b)(b . a_2 + 2c)\cos\varphi}}$$

oder

$$4)\quad tg\,\psi = \pm \frac{2(a . a_2^2 - c) . \sin\varphi}{-b . a_2^2 + 2(a - c) . a_2 + b + 2(a . a_2^2 - c) . \cos\varphi} .$$

Soll aber umgekehrt die Lage der durch die Gleichung (1.) bestimmten Sehnen ausgemittelt werden, welche von ihrem zugehörigen Durchmesser unter einem gegebenen Winkel ψ halbirt werden, so muß die Gleichung (3.) oder (4.) nach a_2 als dem Unbekannten aufgelöst werden. Und für den Fall, daß diejenigen Sehnen gesucht würden, deren Durchmesser sie senkrecht halbirt, hätte man $\cos\psi = 0$, also die Gleichung zur Bestimmung von a_2 dann:

$$5)\quad (-b + 2a . \cos\varphi) . a_2^2 + 2(a - c) . a_2 + b - 2c . \cos\varphi = 0.$$

Die allgemeine Gleichung (3.) oder (4.) zur Bestimmung von a_2 gibt für a_2 4 Werthe und für den Fall, daß der Winkel ψ ein rechter werden soll, gibt die dann statt findende Gleichung (5.) für a_2 doch noch zwei Werthe. Es ist jedoch aus den Elementen hinlänglich bekannt, daß man daraus nicht folgern könne, daß es im allgemeinen 4 verschiedene Lagen der Sehnen (gegen die Axen) geben wird, und in dem andern Fall

2 solche Lagen, deren zugehöriger Durchmesser sie unter dem Winkel ψ, oder im andern Falle senkrecht halbirt; selbst dann nicht, wenn, wie dies hier der Fall ist, alle Werthe, welche für a_2 aus den Gleichungen hervorgehen, reell seyn sollten. Im Gegentheil kann man nur mit Gewißheit behaupten, daß unter den Werthen, welche aus den gedachten Gleichungen für a_2 hervorgehen, diejenigen mit begriffen seyn werden, welche die Lage der Sehnen so bestimmen, wie solches verlangt wurde.

§. 98. Zusatz.

Um dies noch näher zu bezeichnen, setze man den Coefficienten von x in (§. 97. n. 2) $= a_1$ also

$$-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}=a_1,$$

und finde daraus a_2, so wird

$$a_2=-\frac{b.a_1+2c}{2a.a_1+b},$$

so daß a_2 von a_1 genau mittelst derselben Formel abhängt, wie a_1 von a_2.

Sucht man also die Lage des, durch die Gleichung der mit ihm parallelen Geraden $y=a_1.x$, hinlänglich bestimmten Durchmessers, dessen zugehörige Sehnen durch die Gleichung $y=a_2.x$ näher bezeichnet sind, während

$$a_2=-\frac{b.a_1+2c}{2a.a_2+b}$$ ist,

so erhält man nothwendig, in Bezug auf a_1 genau dieselben Gleichungen wie sie (§. 97. n. 3., n. 4. oder n. 5.) zur Bestimmung für a_2 gefunden worden sind.

Die Werthe, die sich (§. 97.) für a_2, und jetzt für a_1 ergeben, sind daher genau dieselben. Unter allen den Werthen, welche sich deshalb (§. 97.) für a_2 (oder jetzt für a_1) ergeben, sind daher nicht blos diejenigen enthalten, welche die Lage der Sehnen bestimmen, sondern auch diejenigen, welche die Lage der

zugehörigen Durchmesser bestimmen; so daß also von den vier Werthen, welche sich (§. 97. n. 3. oder n. 4.) für a_2 ergeben, vielleicht nur 2e seyn werden, welche die Richtung der Sehnen bestimmen, während die beiden andern dann allemal die Lage der zugehörigen Durchmesser aussprechen.

Eben so für den Fall, daß der Durchmesser seine Sehnen rechtwinklich halbiren soll, und wo sich aus (§. 97. n. 5.) für a_2 zwei Werthe ergeben, wird vielleicht nur einer die Lage der Sehnen, der andere aber dann die Lage des zugehörigen Durchmessers aussprechen.

Zugleich ist es aber doch noch möglich, daß alle 4 Werthe von a_2 aus (§. 97. n. 3. oder n. 4.) und eben so alle 2 Werthe aus (§. 97. n. 5.), Sehnen liefern, und dieselben Werthe, nur in anderer Ordnung (als Werthe von a_1), ihre zugehörigen Durchmesser. Dann würden aber jedesmal je zwei Durchmesser existiren, so, daß ein jeder diejenigen Sehnen halbirt, welche mit dem andern parallel laufen.

Dies mag (§. 101.) noch näher untersucht werden.

§. 99. Zusatz.

Sucht man die Coordinaten-Werthe x und y des Durchschnittspunktes der beiden Durchmesser (des §. 93. und des §. 96.).

$$1)\ 2a.y+b.x+d=0 \quad \text{oder} \quad y=-\frac{b}{2a}.x-\frac{d}{2a},$$

$$\text{und} \quad (2a.a_2+b).y_1+(b.a_2+2c).x_1+(d.a_2+e)=0,$$

$$\text{oder 2)}\ y_1=-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}x_1-\frac{d.a_2+e}{2a._2+b},$$

so ergibt sich nach (§. 30.)

$$x'=-\frac{bd-2ae}{b^2-4ac} \quad \text{und} \quad y'=-\frac{be-2cd}{b^2-4ac};$$

und dieser Durchschnittspunkt existirt also allemal, wenn b^2-4ac nicht Null ist, d. h. in der Ellipse und in der Hyperbel. Ist

dagegen $b^2-4ac=0$, die gegebene Curve also eine Parabel, so ist auch

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}, \text{ *)}$$

und die beiden Durchmesser laufen also nun nach (§. 31.) mit einander parallel.

Und weil die Gleichung (2.) alle möglichen Durchmesser vorstellt, die Werthe von x' und y' dagegen a_2 nicht enthalten, also beständig dieselben bleiben, so folgt noch,

α) daß alle Durchmesser der Ellipse und der Hyperbel sich in einem und demselben Punkte schneiden; und

β) daß in der Parabel alle Durchmesser mit einander parallel sind.

§. 100. Zusatz.

Sind x' und x'' die Abscissen-Werthe der Durchschnittspunkte des Durchmessers:

1) $(2a.a_2+b).y_1+(b.a_2+2c).x_1+(d.a_2+e)=0$

mit der Curve:

2) $a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$,

so findet sich nach (§. 82.), wenn x die beiden Werthe x' und x'' zugleich vorstellt:

3) $p.x^2+2q.x+\left(r-\frac{q^2-pr}{4a.(a.a_2^2+b.a_2+c)}\right)=0$,

so daß nach (E. 19.):

---

*) Multiplicirt man nehmlich mit den Nennern, so erhält man die Gleichung $-b^2=4ac$, welches vorausgesetzt ist. — Oder auch so: aus

$$b^2-4ac=0 \quad \text{folgt} \quad c=\frac{b^2}{4a},$$

$$\text{also} \quad b.a_2+2c=b.\left(a_2+\frac{b}{2a}\right)=\frac{b}{2a}.(2a.a_2+b),$$

$$\text{also nun} \quad \frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}=\frac{b}{2a}.$$

4) $x' + x'' = -\frac{2q}{p}$,

und demnach der Abscissen-Werth des Halbirungspunkts des Durchmessers nach (§. 13.):

$$\frac{x' + x''}{2} \text{ d. h. } -\frac{q}{p} \text{ oder } -\frac{bd - 2ae}{b^2 - 4ac}.$$

Und weil dieser Abscissen-Werth derselbe ist, der (§. 99.) für den Abscissen-Werth des Durchschnittspunktes aller Durchmesser gefunden wurde, so erhellet hieraus, daß der Punkt, in welchem sich alle Durchmesser schneiden (in der Ellipse und in der Hyperbel) zu gleicher Zeit jeden dieser Durchmesser halbirt.

Aus diesem Grunde wird dieser Punkt der Mittelpunkt der Curve genannt, und die Länge der Linie vom Mittelpunkt bis zur Curve, der Halbmesser.

Anmerkung. Die Ellipse und die Hyperbel haben also einen Mittelpunkt; in der Parabel dagegen laufen alle Durchmesser mit einander parallel und schneiden die Curve nur in einem einzigen Punkte, so daß daselbst von der Länge des Durchmessers nicht die Rede seyn kann. — Die Gleichung für den Abscissen-Werth des Durchschnittspunktes des Durchmessers der Parabel mit der Curve ist aber aus (§. 100. n. 3.), weil jetzt $p = 0$ ist,

$$2q.x + \left[r - \frac{q^2}{4a.(a.a_2^2 + b.a_2 + c)}\right] = 0,$$

wo x diesen Abscissen-Werth vorstellt.

§. 101. Zusatz.

Aus der Gleichung der Linie der 2ten Ordnung:

1) $a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$

und aus der Gleichung für eine gerade Linie:

2) $y = a_2.x + b_2$,

hat man gefunden die Gleichung des Durchmessers, welcher alle mit der Geraden (2.) parallele Sehnen halbirt, nehmlich:

$$3)\ (2a.a_2+b).y+(b.a_2+2c).x+(d.a_2+e)=0.$$

Man soll nun auch finden die Gleichung des Durchmessers, welcher alle mit dem Durchmesser (3.) selbst parallele Sehnen halbirt.

Weil dies dieselbe Aufgabe ist, als die des (§. 96.), so gibt die dortige Auflösung zugleich die hiesige, wenn nur, wo dort a_2 steht, hier $-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}$ gesetzt wird.

Es ist also die Gleichung des jetzt gesuchten Durchmessers:

$$4)\ A.y+B.x+C=0,$$

wenn $$A=2a.\left(-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}\right)+b=\frac{b^2-4ac}{2a.a_2+b}$$

$$B=b.\left(-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}\right)+2c=-\frac{(b^2-4ac).a_2}{2a.a_2+b}$$

und $$C=d.\left(-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}\right)+e=$$

$$=-\frac{(bd-2ae).a_2-(be-2cd)}{2a.a_2+b}$$

genommen wird. Und dividirt man (4.) durch A weg, so erhält man als Gleichung dieses neuen Durchmessers:

$$y=a_2.x+\frac{(bd-2ae).a_2-(be-2cd)}{b^2-4ac},$$

oder $$5)\ y+\frac{be-2cd}{b^2-4ac}=a_2.\left(x+\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}\right).$$

Weil aber dieses nach (§. 31.) und nach (§. 32.), endlich nach (§. 98.) die Gleichung ist für eine durch den Mittelpunkt hindurchgehende, mit der zuerst gegebenen Geraden (2.) parallele Linie, so folgt, daß der neue gesuchte Durchmesser parallel mit den Sehnen läuft, welche der erste Durchmesser (3.) halbirt.

Es sind also (3.) und (5.) zwei Durchmesser, von denen jeder alle die Sehnen halbirt, welche mit dem andern parallel

laufen. Solche zwei Durchmesser nennt man aber conjungirte, zusammengehörige, einander zugeordnete Durchmesser.

Anmerkung 1. Es versteht sich von selbst, daß dieses nur von der Ellipse und von der Hyperbel gilt, nicht aber von der Parabel, in welcher $b^2 - 4ac = 0$ ist.

Anmerkung 2. Weil der Durchmesser durch den Mittelpunkt gehen muß, dessen Coordinaten-Werthe

$$-\frac{bd-2ae}{b^2-4ac} \quad \text{und} \quad -\frac{be-2cd}{b^2-4ac}$$

sind, so konnte man die Gleichung für den neuen Durchmesser sogleich so nehmen:

$$y+\frac{be-2cd}{b^2-4ac}=A.\left(x+\frac{bd-2ae}{b^2-4ac}\right)$$

und nur noch A der Bedingung gemäß finden, wo sich dann $A=a_2$ ergibt.

§. 102. Zusatz.

Der Winkel ψ, unter welchem die einander zugeordneten Durchmesser:

$$y=-\frac{b.a_2+2c}{2a.a_2+b}.x-\frac{d.a_2+e}{2a.a_2+b}$$

und

$$y=a_2.x+\frac{(bd-2ae).a_2-(be-2cd)}{b^2-4ac}$$

(in der Ellipse und in der Hyperbel) sich schneiden, ist schon (§. 97.) gefunden.

Eben so erhellet jetzt dem (§. 98.) zu Folge, daß in der Ellipse und in der Hyperbel in der That 4 verschiedene Richtungen paralleler Sehnen existiren, welche von den ihnen zugehörigen Durchmessern unter einem gegebenen Winkel ψ halbirt werden, so lange ψ nicht ein rechter ist; dagegen nur 2 solche Richtungen der Sehnen, welche von ihren zugehörigen Durchmessern senkrecht halbirt werden; und zwar laufen die Sehnen jedes-

mal parallel mit dem einen der einander zugeordneten Durchmesser, wenn sie von dem andern halbirt werden.

In der Parabel dagegen, wo alle Durchmesser mit einander parallel laufen, werden nur zwei Lagen der Sehnen existiren, die von ihren zugehörigen Durchmessern unter einem gegebenen Winkel ψ halbirt werden; und nur eine einzige Lage, in welcher die parallelen Sehnen von ihrem zugehörigen Durchmesser senkrecht halbirt werden.

Es werden aber die Durchmesser, welche ihre Sehnen senkrecht halbiren, Haupt-Durchmesser genannt; und es haben also die Ellipsen und die Hyperbeln jedesmal zwei Haupt-Durchmesser, die noch überdies auf einander senkrecht stehen, und einander zugeordnete sind, während die Parabel sich nur eines einzigen Haupt-Durchmessers erfreut.

Zu gleicher Zeit erhellet, daß jeder Haupt-Durchmesser die Curve jedesmal in zwei congruente Theile theilt, was von jedem andern Durchmesser, der nicht Haupt-Durchmesser ist, nicht gesagt werden kann. Aus diesem Grunde wird also die Ellipse und die Hyperbel von ihren beiden Haupt-Durchmessern jedesmal in 4 congruente Theile getheilt.

Anmerkung. Sind aber die Gleichungen für beliebige Tangenten, für beliebige mit ihnen parallele Sehnen, für die Durchmesser, welche diese Sehnen halbiren, endlich für die zusammengehörigen oder einander zugeordneten Durchmesser, nach dem vorhergehenden gefunden, so können nun nach (§. 30. und §. 82.) die Coordinaten-Werthe der Berührungs- und der Durchschnittspunkte je zweier dieser geraden Linien sowohl, als auch der beiden Axen unter sich, und einer jeden derselben mit der Curve; dann nach (§. 14.) die Entfernung je zweier dieser Punkte von einander, (also z. B. die Länge der Sehne, die Länge des Durchmessers u. s. w. f.), endlich nach (§. 34.) jeder Winkel, den je zwei der genannten geraden Linien unter sich, und auch eine jede mit den Coordinaten-Axen bildet, ohne weiters gefunden wer-

den. — Wir wollen deshalb diese allgemeinen Untersuchungen über die Durchmesser nicht mehr weiter treiben, sondern bequemer von der einfachsten Gleichung der Linien der 2ten Ordnung ausgehen, wie solche (§. 76.) gefunden worden ist. — Nur noch einige Folgerungen aus der 6gliedrigen Gleichung entnommen, mögen hier Platz finden, in so ferne sie uns noch mehr lehren, wie eine solche Gleichung analysirt, und aus ihr die geometrischen Eigenschaften der Linie, die sie vorstellt, zu Tage gefördert werden können.

I. Ist, wie bisher immer angenommen wurde

$$1)\quad a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

die Gleichung für die Linie der 2ten Ordnung auf Axen bezogen, welche unter sich einen beliebig gegebenen Winkel φ bilden, so wird diese Gleichung nach y geordnet, die Gestalt:

$$2)\quad y^2+\frac{bx+d}{a}.y+\frac{c.x^2+e.x+f}{a}=0$$

annehmen, und $-\frac{b.x+d}{a}$ wird die Summe, so wie $\frac{c.x^2+e.x+f}{a}$ das Produkt seyn, der zu einem beliebigen x gehörigen beiden Ordinaten-Werthe, welche durch y' und y'' vorgestellt seyn mögen; so daß also

$$3)\quad y'+y''=-\frac{b.x+d}{a},$$

$$4)\quad y'.y''=\frac{c.x^2+e.x+f}{a}$$ ist.

Für einen andern Werth von x, der durch x_1 vorgestellt seyn mag, wollen wir die beiden zugehörigen Ordinaten-Werthe durch y'_1 und y''_1 vorstellen, und man hat wiederum

$$5)\quad y'_1+y''_1=-\frac{b.x_1+d}{a},$$

$$6)\quad y'_1.y''_1=\frac{c.x_1^2+e.x_1+f}{a}.$$

Zieht man nun die (5.) von der (3.) ab, so ergibt sich:

$$7)\ (y' - y'_1) + (y'' - y''_1) = -\frac{b}{a}.(x - x_1),$$

oder $8)\ (y' - y'_1) + (y'' - y''_1) : x - x_1 = -b : a,$

d. h. die Summe aus den Differenzen der in jedem der beiden Zweige der Curve zu x und x_1 gehörigen Ordinaten-Werthe, verhält sich zur Differenz der Abscissen-Werthe, wie $-b:a$; so daß also dieses Verhältniß von x und x_1 selbst unabhängig ist und durchaus dasselbe bleibt, man mag die Abscissen-Werthe nehmen, wie man will.

Beispiel 1. Nimmt man z. B. (Fig. 34.) $x = -AP$, so ist $y' = PM$ und $y'' = -PN$ und für $x_1 = -AP'$ ist $y'_1 = P'M'$ und $y''_1 = -P'N'$; und dann hat man:

$x - x_1 = PP'$, $y' - y'_1 = -M'\mu'$ und $y'' - y''_1 = N'\nu'$;

also die obige Proportion

$$N'\nu' - M'\mu' : PP' = -b : a.$$

Beispiel 2. Wird $x = -AP$ gelassen, aber $x_1 = -AP''$ genommen, so ist $y'_1 = P''M''$ und $y''_1 = -P''N''$, also $y' - y'_1 = M''\mu''$ und $y'' - y''_1 = N''\nu''$; also die obige Proportion:

$$N''\nu'' + M''\mu'' : PP'' = -b : a,$$

und daher auch

$$N'\nu' - M'\mu' : PP' = N''\nu'' + M''\mu'' : PP''.$$

Beispiel 3. Wird x wie im (B. 1.) gelassen, aber $x_1 = -AP^{IV}$ genommen, so ergibt sich $y'_1 = y''_1 = -M^{IV}P^{IV}$, folglich

$y' - y'_1 = M^{IV}\mu^{IV}$ und $y'' - y''_1 = M^{IV}\nu^{IV}$;

also die gedachte Proportion jetzt:

$M^{IV}\nu^{IV} + M^{IV}\mu^{IV} : PP^{IV} = -b : a = N''\nu'' + M''\mu'' : PP'' =$ etc. etc.

Beispiel 4. Nimmt man $x = -AP^{IV}$, und $x_1 = -AP'$, so hat man:

$y' = -M^{IV}P^{IV}$, $y'' = -N^{IV}P^{IV}$, $y'_1 = P'M'$, $y''_1 = -P'N'$,

also $x - x_1 = -P'P^{IV}$, $y' - y'_1 = -M'm'$, $y'' - y''_1 = m'N'$,

mithin obige Proportion:

$$M'm' - m'N' : P^{IV}P' = -b : a.$$

Beispiel 5. Nimmt man x wie im (B. 4.), dagegen x_1 nach und nach $= -AP'''$, $= -AP''$, $= -AP$, etc., so erhält man:

$M'''m'''-m'''N''' : P^{IV}P''' = M''m''-m''N'' : P^{IV}P'' =$
$= M'm'-m'N' : P^{IV}P' = Mm+mN : P^{IV}P$ *) = etc. etc.

II. Wird die Curve von der Abscissen-Axe in zwei Punkten geschnitten, so ist für diese Durchschnittspunkte $y=0$; die Abscissen-Werthe derselben sind also gegeben, durch die Gleichung:

$$9)\quad c.x^2+e.x+f=0,$$

so daß, wenn x' und x'' diese Abscissen-Werthe vorstellen, allemal

$$10)\quad c.\left(x^2+\frac{e}{c}.x+\frac{f}{c}\right)=c.(x-x')(x-x'') \text{ ist,}$$

wo x selber jeden beliebigen Werth repräsentirt. — Sind nun y' und y'', wie in (I.), die zu dem beliebigen x gehörigen beiden Ordinaten-Werthe, so hat man aus (I. 4.):

$$y'.y''=\frac{c}{a}.(x-x').(x-x''),$$

d. h. $$y'.y'':(x-x')(x-x'')=c:a,$$

wo x' und x'' die Abscissen-Werthe sind der Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissen-Axe.

Es steht also das Produkt der beiden zu einerlei beliebigem Abscissen-Werth x gehörigen Ordinaten-Werthe y' und y'' zu dem Produkt der Abstände des Endpunktes von x, von den Durchschnittspunkten der Curve und der Abscissen-Axe, d. h. zu $(x-x')(x-x'')$ in einem und demselben beständigen Verhältniß $c:a$, wie man auch x nehmen möge.

Beispiele. Es ist demnach (Fig. 34.) in jeder Linie der 2ten Ordnung (Parabel, Ellipse oder Hyperbel) allemal

---

*) Man kann daraus folgern, daß wenn $M'''m'''=m'''N'''$ ist, dann auch $M''m''=m''N''$, und noch $M'm'=m'N'$, u. s. w. f. seyn müsse; d. h. wenn AP^{IV} oder AX' durch den Berührungspunkt M^{IV} geht und noch eine Sehne $M'''N'''$ halbirt, so halbirt sie auch alle übrigen mit der gedachten Tangente und Sehne parallelen Sehnen. Die Eigenschaft des Durchmessers würde also auch hieraus hervorgehen.

$$PM.PN:PS.PR=c:a;$$

eben so auch $P'M'.P'N':P'S.P'R=c:a;$

und auch $P'''M'''.P'''N''':P'''S.P'''R=c:a;$

so wie noch $(P^{IV}M^{IV})^2:P^{IV}S.P^{IV}R=c:a.$

Also auch

$$PM.PN:PR.PS=P'M'.P'N':P'R.P'S$$
$$=P''M''.P''N'':P''R.P''S=P'''M'''.P'''N''':P'''R.P'''S$$
$$=(P^{IV}.M^{IV})^2:P^{IV}R.P^{IV}S=\text{etc. etc.}$$

Und weil diese letztere Proportionen alle weder c noch a mehr enthalten, folglich als eine Eigenschaft der Curve dastehen, welche für jede andere Abscissen-Axe eben so gefunden worden wäre, so hat man noch:

$$P'M'.P'N':P'R.P'S=\nu'M'.\nu'N':\nu'N.\nu'T,$$

und letzteres Verhältniß ist wiederum

$$=\nu''M''.\nu''N'':\nu''N.\nu''T=\nu'''M'''.\nu'''N''':\nu'''N.\nu'''T$$
$$=m'''M'''.m'''N''':m'''U.m'''M^{IV}=m''M''.m''N'':m''U.m''M^{IV}$$
$$=mM.mN:mU.mM^{IV}=\text{etc. etc. etc.}$$

Wenn also in einer Linie der 2ten Ordnung zwei Paare paralleler Linien sich einander und die Curve schneiden, so stehen die Produkte der Entfernungen, der Durchschnittspunkte der parallelen Linien unter sich, von den Durchschnittspunkten einer jeden derselben mit der Curve in Proportion.

Und ist (Fig. 34.) $\mu^{IV}M^{IV}$ eine Tangente in M^{IV}, so erscheint dieselbe Proportion in dieser Gestalt:

$$(\mu^{IV}M^{IV})^2:\mu^{IV}L.\mu^{IV}M=(P^{IV}M^{IV})^2:P^{IV}R.P^{IV}S$$
$$=(\nu^{IV}M^{IV})^2:\nu^{IV}T.\nu^{IV}N=\text{etc. etc.}$$

Weil ferner die eine der parallelen Linien Durchmesser seyn kann, die andere eine von ihm halbirte Sehne, z. B. RS der Durchmesser und MN, M'N', M''N'' etc. etc. seine von ihm halbirten Sehnen, so nimmt die obige Proportion auch noch nachstehende Form an:

$$PM^2:PR.PS=(P'M')^2:P'R.P'S=(P''M'')^2:P''R.P''S,$$

in so fern $PN=PM$, also $PM.PN=PM^2$, u. s. w. f. ist. Ist also die Länge des Durchmessers $RS=a$, und ist für einen beliebigen Punkt M, $RP=t$ und $PM=u$, so hat man

$SP = a - t$ und nach der zuletztstehenden Proportion $u^2 : t(a-t)$ als ein gegebenes Verhältniß, etwa $= \alpha : \beta$, wo α und β von t unabhängig sind. Zuletzt folgt aber noch

aus $$u^2 : t(a-t) = \alpha : \beta$$

auch $$u^2 = \frac{\alpha}{\beta}(at - t^2);$$

welcher Gleichung also die Coordinaten-Werthe eines jeden beliebigen Punktes der Curve genügen, wenn solche beziehlich statt t und u gesetzt werden; so daß

$$u^2 = \frac{\alpha}{\beta}(at - t^2)$$

als die Gleichung sich ergibt der Curve, zwischen den auf den Durchmesser als Abscissen-Axe und die durch R parallel mit seinen zugehörigen Sehnen hindurchgehende Ordinaten-Axe bezogenen Coordinaten-Werthen t und u. *) (Vergl. §. 76.)

III.) Es würde nicht schwer werden, auf diese Weise eine geometrische Betrachtung an die andere anzureihen und so neue Resultate in der Figur nachzuweisen.

Wird z. B. eine Linie (Fig. 34.) $\mu^{IV}M$ in V so getheilt, daß $$(\mu^{IV}V)^2 = \mu^{IV}L . \mu^{IV}M$$ ist, so wird die gerade Linie VM^{IV} alle übrigen parallelen Linien z. B. $P^{IV}S$ in W in demselben Verhältniß theilen, so nehmlich, daß

$$(P^{IV}W)^2 = P^{IV}R . P^{IV}S \quad \text{ist.}$$

Denn es ist, wie in (II.) gesehen worden,

$$(\mu^{IV}M^{IV})^2 : \mu^{IV}L . \mu^{IV}M = (P^{IV}M^{IV})^2 : P^{IV}R . P^{IV}S,$$

also $$(\mu^{IV}M^{IV})^2 : (\mu^{IV}V)^2 = (P^{IV}M^{IV})^2 : P^{IV}R . P^{IV}S,$$

---

*) Dies würde jedoch nicht gut von der Parabel behauptet werden können, weil die Durchmesser der Parabel die Curve jedesmal nur in einem einzigen Punkte treffen; von der Länge des Durchmessers a also bei der Parabel nicht füglich die Rede seyn kann.

oder $$\mu^{IV}M^{IV} : \mu^{IV}V = P^{IV}M^{IV} : \sqrt{P^{IV}R.P^{IV}S.}$$

Aber auch aus der bloßen Betrachtung der Figur

$$\mu^{IV}M^{IV} : \mu^{IV}V = P^{IV}M^{IV} : P^{IV}W.$$

Also, wenn man die beiden letztern Proportionen mit einander vergleicht:

$$P^{IV}W = \sqrt{P^{IV}R.P^{IV}S},$$

oder $$(P^{IV}W)^2 = P^{IV}R.P^{IV}S.$$

Wir wollen jedoch diese Wege hier nicht weiter mehr verfolgen, den Leser auf den 2ten Theil der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von Euler verweisend, sondern zu den rein analytischen Wegen zurückkehren, jedoch dasmal der größern Bequemlichkeit wegen von der einfachsten, nach (§. 76.) eben so noch jede mögliche Linie der 2ten Ordnung vorstellenden Gleichung:

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

ausgehend.

Schluß-Anmerkung. Das in diesem Kapitel gelehrte konnte auf ganz andern Wegen entwickelt werden, und zwar zunächst so, wie solches in den bei (§. 71.) unten aufeinander folgenden Noten angedeutet sich findet. *)

*) Man braucht dort nicht $F=0$ zu setzen, alles übrige bleibt doch unverändert.

Sechstes Kapitel.

Relationen zwischen den Längen der Durchmesser. Die Scheitelgleichungen. Brennpunkte. Die Mittelpunktsgleichungen. Gleichungen zwischen Polar-Coordinaten.

§. 103. Aufgabe.

Man will von nun an von der Gleichung:

$$1)\ y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$$

ausgehen, auf Axen bezogen, welche in ihrer ersten Region einen beliebig gegebenen Winkel φ mit einander machen (welche Gleichung nach §. 76. noch jede Linie der 2ten Ordnung vorstellt, d. h. noch jede Parabel, jede Ellipse und auch jede Hyperbel, wenn nur nach und nach für α, β und γ alle verschiedene und beliebige reelle Werthe gesetzt worden). — Man soll alle vorher für den Fall, daß die Gleichung für die Curve so:

$$2)\ a . y^2 + b . xy + c . x^2 + d . y + e . x + f = 0$$

gegeben ist, gefundenen Resultate, für den gegenwärtigen Fall umformen und aufzeichnen.

Auflösung. Weil die jetzt gegebene Gleichung (1.) in der früher gegebenen Gleichung (2.) enthalten ist, und aus letzterer hervorgeht, wenn man für

	a,	b,	c,	d,	e	und	f
beziehlich	1,	0,	$-\gamma$,	0,	$-\beta$	und	$-\alpha$

setzt, so ist alles frühere aus der Gleichung (2.) abgeleitete so anzusehen, wie wenn solches aus der gegenwärtigen Gleichung (1.) abgeleitet worden wäre, sobald man sich nur unter a, b, c, d, e und f dieselben Werthe denkt.

Weil aber jetzt

$$p = b^2 - 4ac = 0 + 4\gamma = 4\gamma,$$

$$q = bd - 2ae = 0 + 2\beta = 2\beta,$$

und $r = d^2 - 4af = 0 + 4\alpha = 4\alpha$ ist,

so hat man zunächst folgende Resultate:

I. Aus (§. §. 66 und 68.). — Die Gleichung:

$$y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$$ gibt

1) nicht einen einzigen Punkt, wenn γ negativ und zugleich $\beta^2 < 4\alpha\gamma$, oder wenn $\gamma = 0$ und $\beta = 0$ und α negativ seyn sollte;

2) nur einen einzigen Punkt, wenn γ negativ und $\beta^2 = 4\alpha\gamma$ ist;

3) zwei gerade Linien, welche gegen einander nnd gegen die Axen eine völlig bestimmte Lage haben, wenn γ positiv und zugleich $\beta^2 = 4\alpha\gamma$, oder wenn $\gamma = 0$, $\beta = 0$ und α positiv ist;

4) eine Ellipse, wenn γ negativ, aber zugleich $\beta^2 > 4\alpha\gamma$;

5) eine Parabel, wenn $\gamma = 0$ aber nicht zugleich $\beta = 0$ ist; endlich

6) eine Hyperbel wenn γ positiv, aber zugleich $\beta^2 \geqslant 4\alpha\gamma$ (d. h. nicht $\beta^2 = 4\alpha\gamma$) ist.

II. Wenn $\alpha = 0$, also $y^2 = \beta . x + \gamma . x^2$ ist, so wird für $x = 0$ auch $y = 0$, und es ist also dann der Anfangspunkt der Coordinaten zugleich ein Punkt der Curve.

Umgekehrt, soll der Anfangspunkt der Coordinaten in der Curve liegen, so muß auch $\alpha = 0$ seyn.

III. Da aus $y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$ die beiden Werthe von y, absolut genommen, einander gleich werden, so ge-

hören zu jeder Abscisse zwei gleiche Ordinaten, so daß die Abscissen-Axe alle mit der Ordinaten-Axe parallele Sehnen halbirt, mithin Durchmesser dieser Sehnen ist. — Umgekehrt: wird ein Durchmesser zur Abscissen-Axe genommen, und die Ordinaten-Axe parallel mit seinen zugehörigen Sehnen, so muß die Gleichung so seyn, daß die beiden Werthe von y absolut genommen, einander gleich werden, daß also der Coefficient von $y = 0$ wird, so daß die Gleichung selbst die Form:

$$y^2 + c.x^2 + e.x + f = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = \alpha + \beta.x + \gamma.x^2$$

annimmt.

Wenn aber dieses nicht direkt in die Augen fiele, so wäre solches eine unmittelbare Folgerung des (§. 92.), in so ferne die dortige Gleichung für den Durchmesser, welcher alle mit der Ordinaten-Axe parallele Sehnen halbirt,

$$2a.y + b.x + d = 0,$$

sich jetzt auf $y = 0$ reducirt, welches die Gleichung ist für die Abscissen-Axe selber.

IV. Die Abscissen-Werthe der Durchschnittspunkte der Abscissen-Axe mit der Curve sind, nach (§. 83. n. 2. 2.), gegeben durch die Gleichung:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0 \ *)$$

oder

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}.$$

Und weil nach (§. 11.) die Differenz dieser Abscissen-Werthe, absolut genommen, der Abstand der Durchschnittspunkte von einander, also dasmal die Länge des Durchmessers ist, so finden

---

*) Es ist nehmlich für diese Punkte $y = 0$, wo die Wurzel jedesmal den positiven oder den negativen ihrer Werthe vorstellt, je nachdem γ selbst positiv oder negativ ist, damit der Ausdruck für die Länge des Durchmessers absolut werde, wie dies seyn muß.

wir die Länge dieses mit der Abscissen-Axe zusammenfallenden Durchmessers

$$= \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\gamma}.$$

Und der Abscissen-Werth des Halbirungspunkts des Durchmessers (d. h. des Mittelpunktes) ist, nach (§. 11.) $= -\frac{\alpha}{2\gamma}$.

Die Endpunkte des Durchmessers sind die Berührungspunkte der, mit der Ordinaten-Axe parallelen Tangenten (§. 95.). Und der diesem Abscissen-Durchmesser zugeordnete Durchmesser läuft parallel mit der Ordinaten-Axe; so daß der Axen-Winkel φ zu gleicher Zeit der Winkel ist, den diese zusammengehörige Durchmesser mit einander machen.

V. Ist $y = a_2 . x + b_2$ die Gleichung irgend einer geraden Linie, so wird die Gleichung für den Durchmesser, welcher alle mit dieser Geraden, parallele Sehnen halbirt, nach (§. 96.):

$$y = \frac{\gamma}{a_2} . x + \frac{\beta}{2a_2}.$$

Die Gleichung des ihm zugeordneten Durchmessers, weil solcher durch den Mittelpunkt gehen muß, und parallel mit der Linie $y = a_2 . x + b_2$, ist dagegen $y = a_2 . \left(x + \frac{\beta}{2\gamma}\right)$; nach (IV.) oder aus (§. 101). Und der Winkel ψ, unter dem sich diese beiden schneiden, ist gegeben durch die Gleichung:

$$\cos\psi = \frac{1 + \gamma + \left(a_2 + \frac{\gamma}{a_2}\right).\cos\varphi}{\sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2 . \cos\varphi} . \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{a_2}\right)^2 + 2\frac{\gamma}{a_2} . \cos\varphi}}$$

und

$$\sin\psi = \frac{\pm\left(a_2 - \frac{\gamma}{a_2}\right).\sin\varphi}{\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}.\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{a_2^2}+2\frac{\gamma}{a_2}.\cos\varphi}}$$

$$= \frac{\pm(a_2^2-\gamma).\sin\varphi}{\gamma.\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}.\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi}}.$$

Dieser Winkel wird ein rechter, wenn

$$1+\gamma+\left(a_2+\frac{\gamma}{a_2}\right).\cos\varphi = 0$$

ist; und aus dieser Gleichung wird a_2, und somit die Lage der Hauptdurchmesser gefunden.

Ist φ ein rechter Winkel, so ist die Abscissen-Axe selbst schon ein Hauptdurchmesser.

VI. Aus (§. 99.). — Die Abscissen-Werthe der Durchschnittspunkte des, alle mit $y = a_2.x$ parallelen Sehnen halbirenden Durchmessers:

$$1)\quad 2a_2.y = 2\gamma.x+\beta$$

mit der Curve:

$$2)\quad y^2 = \alpha+\beta.x+\gamma.x^2$$

sind gegeben durch die Gleichung:

$$3)\quad \gamma.x^2+\beta.x+\frac{4\alpha.a_2^2-\beta^2}{4(a_2^2-\gamma)} = 0.$$

Daraus findet sich

$$4)\quad x = \frac{-\beta\pm a_2.\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}}}{2\gamma},$$

und die zugehörigen Ordinaten-Werthe:

$$5)\quad y = \frac{\gamma}{a_2}.x+\frac{\beta}{2a_2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}}.$$

Sind also x' und x'' die beiden Werthe von x und y' und y'' die zugehörigen Werthe von y, so hat man:

$$6)\ x'-x''=\pm\frac{a_2}{\gamma}.\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}},$$

$$7)\ y'-y''=\pm\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}},$$

also nach (§. 14.), wenn die Länge des Durchmessers durch 2f vorgestellt wird:

$$8)\ldots.2f=\sqrt{\frac{\beta^2-4a\gamma}{a_2^2-\gamma}}.\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2\,\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi}.$$

VII. Es ergibt sich aber eben so die Länge des, diesem zugeordneten und durch die Gleichung:

$$1)\ y=a_2.\left(x+\frac{\beta}{2\gamma}\right)$$

gegebenen Durchmessers.

Für die Durchschnittspunkte desselben mit der Curve, also für seine Endpunkte, hat man nehmlich, außer der Gleichung (1.), noch die Gleichung der Curve:

$$2)\ y^2=\alpha+\beta.x+\gamma.x^2;$$

also, wenn man y eliminirt:

$$3)\ (a_2^2-\gamma).x^2+\frac{\beta}{\gamma}.(a_2^2-\gamma).x+\left(\frac{\beta^2.a_2^2}{4\gamma^2}-\alpha\right)=0,$$

woraus

$$4)\ x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\frac{-\gamma(\beta^2-4\alpha\gamma}{(a_2^2-\gamma)}}}{2\gamma}$$

hervorgeht. — Dann sind die zugehörigen Ordinaten dieser Endpunkte aus (1.):

$$5)\ y=\pm\frac{a_2}{2\gamma}.\sqrt{\frac{-\gamma(\beta^2-4\alpha\gamma)}{(a_2^2-\gamma)}},$$

Bedeuten also x' und x'' die beiden Werthe der Abscissen, y' und y'' die beiden zugehörigen Ordinaten-Werthe, so hat man:

$$6)\ x' - x'' = \frac{1}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{-\gamma(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{(a_2^2 - \gamma)}}$$

und

$$7)\ y' - y'' = \frac{a_2}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{-\gamma(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{(a_2^2 - \gamma)}},$$

folglich nach (§. 14.), wenn die Länge dieses zugeordneten Durchmessers durch $2g$ bezeichnet wird:

$$8)\ldots.2g = \sqrt{\frac{-(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{\gamma.(a_2^2 - \gamma)}} \cdot \sqrt{1 + a_2^2 + 2a_2.\cos\varphi}.$$

VIII. In der Parabel kann von zusammengehörigen (einander zugeordneten) Durchmessern nicht die Rede seyn, weil sie daselbst alle mit einander parallel laufen, und nur die Sehnen, die sie halbiren, jedesmal einen andern Winkel mit ihrem Durchmesser bilden, so daß ein einziger darunter seine Sehnen senkrecht halbirt, welcher dann Hauptdurchmesser genannt wird (Vergl. §. 102.).

In der Hyperbel, wo γ positiv und $\beta^2 \gtrless 4\alpha\gamma$ ist, werden die Coordinaten-Werthe der Durchschnittspunkte des Durchmessers mit der Curve, bei dem einen Durchmesser allemal imaginär, wenn sie bei dem andern reell werden; wie aus den Formeln (VI. n.n. 4. 5. und VII. n.n. 4. 5.), wenn man sie mit einander vergleicht, unmittelbar hervorgeht. In der Hyperbel trifft also immer nur einer der zugeordneten Durchmesser die Curve, während einer sie auch jedesmal wirklich trifft. In der Hyperbel kann also von der Länge beider zusammengehörigen Durchmesser nie die Rede seyn, sondern immer nur von der Länge desjenigen der die Curve wirklich trifft.

In der Ellipse endlich, wo γ und $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ allemal zugleich negativ seyn müssen, sind die Werthe (n. n. 4. 5. so-

wohl in VI. als in VII.) allemal beide reell. Also treffen in der Ellipse allein, beide zusammengehörige Durchmesser allemal die Curve wirklich, so daß nur in der Ellipse allein von der Länge beider zusammengehörigen Durchmesser die Rede seyn kann; wie solches auch noch insbesondere aus den Formeln (VI. n. 8. und VII. n. 8.), welche die Längen dieser Durchmesser ausdrücken, hervorgeht, in so ferne nur in der Ellipse beide zugleich reell werden.

IX. Aus (§. 89.). — Die Gleichung für die Tangente, welche die durch

$$1)\quad y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$$

gegebene Curve in dem Punkte (x, y) berührt, findet sich nach (§. 89.):

$$y_1 - y = \frac{2\gamma . x + \beta}{2y} . (x_1 - x),$$

wo x_1 und y_1 die Coordinaten-Werthe ihrer einzelnen Punkte vorstellen.

X. Aus (§. 91.). — Die Gleichung für die Tangente an die durch die Gleichung:

$$1)\quad y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$$

gegebene Curve, welche mit der gegebenen geraden Linie:

$$2)\quad y = a_2 . x + b_2$$

parallel läuft, ist nach (§. 91.):

$$3)\quad y_1 = a_2 . x_1 + \nu,$$

während ν gegeben ist durch die Gleichung:

$$4)\quad 4\gamma . \nu^2 - 4\beta . a_2 . \nu + 4\alpha . a_2^2 + (\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 0,$$

so daß $$5)\quad \nu = \frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma)(a_2^2 - \gamma)}}{2\gamma}$$ wird.

Nach (§. 91. Anmerkung) dagegen, würde man zur Gleichung für die gesuchte Tangente lieber

$$6)\quad y_1 - y = \frac{2\gamma . x + \beta}{2y} . (x_1 - x)$$ genommen haben,

wo x und y jetzt die Coordinaten-Werthe des Berührungspunktes sind, aus den Gleichungen:

$$7)\ \frac{2\gamma.x+\beta}{2y}=a_2 \quad \text{oder} \quad 2a_2.y-2\gamma.x-\beta=0,$$

und $8)\ y^2=\alpha+\beta.x+\gamma.x^2$

noch gefunden werden müssen, und in (VI. n. n. 4. und 5.) bereits schon für die Durchschnittspunkte des zugehörigen Durchmessers gefunden worden sind.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, daß man die Resultate dieser 10 Nummern (I—X.) alle direkt erhalten haben würde, wenn man jenes Verfahren, welches auf die Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

angewandt worden ist, sogleich direkt auf die jetzige Gleichung hätte anwenden wollen, was Anfängern, vorzunehmen dringend gerathen wird, weil solches eine nicht zu schwere und doch sehr übende Beschäftigung ist.

§. 104. Zusätze.

Es lassen sich aber aus den so eben gefundenen Resultaten sogleich wiederum neue Folgerungen ziehen:

1) In der Ellipse, in welcher unter allen Linien der zweiten Ordnung allein, die beiden einander zugeordneten Durchmesser die Curve wirklich treffen, welche also beide die (§. 103. VI. n. 8. und VII. n. 8.) gefundenen Längen haben, ist die Summe der Quadrate dieser Längen, nehmlich:

$$4f^2+4g^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}.\left(1+\frac{a_2^2}{\gamma^2}+2\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi\right)$$

$$-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{\gamma(a_2^2-\gamma)}(1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi)$$

$$=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}\left[1+\frac{a_2^2}{\gamma^2}-\frac{1}{\gamma}-\frac{a_2^2}{\gamma}\right]=$$

$$= \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{a_2^2 - \gamma} \cdot \frac{(a_2^2 - \gamma)(1-\gamma)}{\gamma^2} = \frac{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)(1-\gamma)}{\gamma^2},$$

d. h. $f^2 + g^2 = \frac{(\beta^2 - 4\alpha\gamma).(1-\gamma)}{4\gamma^2}$, wo f und g die einander zugeordneten Halbmesser sind.

Weil aber die Summe der Quadrate dieser beiden einander zugeordneten Halbmesser, von a_2 ganz unabhängig ist, in so ferne a_2 in dem gefundenen Ausdruck gar nicht mehr vorkommt, dieses a_2 aber die Lage des einen und somit auch des andern dieser Durchmesser bestimmt, so bleibt also die Summe der Quadrate je zweier zusammengehörigen Durchmesser (oder ihrer Halbmesser) in derselben Ellipse immer gleich groß, welches Paar einander zugeordneter Durchmesser man nur immer nehmen möge.

2) Das Produkt der beiden Längen der einander zugeordneten Durchmesser mit einander und mit dem Sinus des von ihnen gebildeten Winkels ψ multiplicirt, ist nach (§. 103. VI. n. 8. VII. n. 8. und V.):

$$4fg.\sin\psi = \frac{(\beta^2 - 4\alpha\gamma).\sin\varphi}{\gamma.\sqrt{-\gamma}},$$

oder

$$fg.\sin\psi = \frac{(\beta^2 - 4\alpha\gamma).\sin\varphi}{4\gamma.\sqrt{-\gamma}},$$

wo $\sqrt{-\gamma}$ allemal reell ist, aber negativ genommen werden muß, damit der ganze Ausdruck absolut (positiv) werde (in so ferne nehmlich hier γ negativ seyn muß und zugleich $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, nach (§. 103. I. 4.)).

Und weil auch dieser Ausdruck das a_2 nicht mehr enthält, so ist auch dieses Produkt von der Lage des einen, also auch beider einander zugeordneten Durchmesser ganz unabhängig und bleibt immer dasselbe, die Durchmesser mögen angenommen werden, wo sie wollen, wenn sie nur jedesmal einander zugeordnete bleiben.

§. 105. Zusatz.

Dies veranlaßt uns, überhaupt zwei beliebige Paare zusammengehöriger Durchmesser zu betrachten; und so wollen wir außer

den beiden eben betrachteten, noch diejenigen beiden zusammengehörigen Durchmesser der Ellipse berücksichtigen, deren einer in der Abscissen-Axe liegt, der andere parallel mit der Ordinaten-Axe läuft, und wovon wir die Länge des ersten durch 2h, die des andern durch 2k vorstellen wollen.

Es sind aber die Coordinaten-Werthe der Endpunkte des Durchmessers 2h (nach §. 103.):

$$\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma} \quad \text{und} \quad \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma};$$

daher nach (§. 11.), wenn $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ ihren absoluten Werth vorstellt,

$$1)\ 2h=\frac{-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\gamma}.$$

Ferner ist nach (§. 103. IV.) der Abscissen-Werth des Mittelpunktes $=-\frac{\beta}{2\gamma}$, folglich der zugehörige Ordinaten-Werth der Curve, wie solcher aus $y^2=\alpha+\beta.x+\gamma.x^2$ für y sich ergibt, wenn $-\frac{\beta}{2\gamma}$ statt x gesetzt wird,

$$=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\sqrt{-\gamma}}.$$

Diese durch den Mittelpunkt gehende Ordinate, doppelt genommen ist aber der Durchmesser 2k; also hat man:

$$2)\ 2k=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\sqrt{-\gamma}},$$

wo jede Wurzel ihren absoluten Werth vorstellt.

Ferner hat man gefunden (§. 103. VI. n. 8.):

$$3)\ 2f=\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}}.\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi},$$

und (§. 103. VII. n. 8.):

$$4)\quad 2g=\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{a_2^2-\gamma}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\cdot\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}.$$

Diese 4 Durchmesser 2f, 2g, 2h, 2k bilden nun paarweise mit einander Winkel, welche beziehlich durch

(f, g), (f, h), (f, k), (g, h), (g, k), (h, k)

bezeichnet seyn mögen, und da für die Linien alle die Gleichungen gegeben sind zwischen ihren Coordinaten-Werthen, so kann man nach (§. 34.) diese Winkel alle finden.

Es sind nehmlich die Gleichungen

für 2f.... $y=\frac{\gamma}{a_2}.x+\frac{\beta}{2a_2}=0,$

für 2g.... $y=a_2.\left(x+\frac{\beta}{2\gamma}\right),$

für 2h.... $y=0$ (die Abscissen-Axe),

für 2k.... $x=-\frac{\beta}{2\gamma}$ (die durch den Mittelpunkt mit der Ordinaten-Axe parallele Linie),

also nach (§. 34.):

$$5)\quad \sin(f,g)=\frac{\pm\left(a_2-\frac{\gamma}{a_2}\right).\sin\varphi}{\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}.\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{a_2}\right)^2+2\frac{\gamma}{a_2}.\cos\varphi}}$$

$$=\frac{\pm(a_2^2-\gamma).\sin\varphi}{\gamma\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}.\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi}},$$

$$6)\quad \sin(f,h)=\frac{\pm\frac{\gamma}{a_2}.\sin\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{a_2}\right)^2+2\frac{\gamma}{a_2}.\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{\pm\sin\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2.\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi}},$$

$$7)\ \sin(f,k)=\frac{\pm\sin\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{a_2}\right)^2+2.\frac{\gamma}{a_2}.\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{\pm\frac{a_2}{\gamma}.\sin\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2.\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi}},$$

$$8)\ \sin(g,h)=\frac{\pm a_2.\sin\varphi}{\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}},$$

$$9)\ \sin(g,k)=\frac{\pm\sin\varphi}{\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}},$$

10) $\sin(h,k)=\sin\varphi$, weil $(h,k)=\varphi$.

Daraus folgt nun:

$$11)\ f.g.\sin(f,g)=-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\gamma.\sqrt{-\gamma}}.\sin\varphi,$$

wenn $\sqrt{-\gamma}$ ihren absoluten Werth vorstellt;

$$12)\ f.h.\sin(f,h)=\mp\frac{(\beta^2-4\alpha\gamma).\sin\varphi}{4\gamma.\sqrt{a_2^2-\gamma}},$$

$$13)\ f.k.\sin(f,k)=\mp\frac{a_2.(\beta^2-4\alpha\gamma).\sin\varphi}{4\gamma.\sqrt{-\gamma}.\sqrt{a_2^2-\gamma}},$$

$$14)\ g.h.\sin(g,h)=\mp\frac{a_2.(\beta^2-4\alpha\gamma).\sin\varphi}{4\gamma.\sqrt{-\gamma}.\sqrt{a_2^2-\gamma}},$$

$$15)\ g.k.\sin(g,k)=\mp\frac{(\beta^2-4\alpha\gamma).\sin\varphi}{4\gamma.\sqrt{a_2^2-\gamma}},$$

$$16)\ h.k.\sin(h,k)=-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\gamma.\sqrt{-\gamma}}.\sin\varphi,$$

wo die Ausdrücke links nothwendig positiv sind, die zur rechten also absolut genommen werden müssen.

Und daraus folgern noch die Gleichungen:

17) $f.g.\sin(f,g)=h.k.\sin(h,k)$,

18) $f.h.\sin(f, h) = g.k.\sin(g, k)$,

19) $f.k.\sin(f, k) = g.h.\sin(g, h)$,

welche 3 letztern Gleichungen in Verbindung mit der bereits gefundenen Gleichung:

20) $f^2 + g^2 = h^2 + k^2$,

die wichtigsten Eigenschaften der zugeordneten Durchmesser der Ellipse aussprechen; während solche offenbar durch dieselben Schlüsse sich ergeben, es mag die Gleichung der Curve auf diese jetzige einander zugeordnete Durchmesser als Coordinaten-Axen bezogen werden, oder auf irgend zwei andere, so daß die 4 Durchmesser 2f, 2g, 2h und 2k, als 2 beliebige Paare einander zugeordneter Durchmesser angesehen werden können.

Anmerkung. Ist (Fig. 40.) $AC = f$, $CD = h$, $BC = g$ und $CE = k$, so ist

$f.g.\sin(f, g)$ der doppelte Inhalt des $\triangle ABC$,

$f.h.\sin(f, h)$ = = = = $\triangle ACD$,

$f.k.\sin(f, k)$ = = = = $\triangle ACE$,

$g.h.\sin(g, h)$ = = = = $\triangle BCD$,

$g.k.\sin(g, k)$ = = = = $\triangle BCE$,

$h.k.\sin(h, k)$ = = = = $\triangle DCE$.

Also lehren die Sätze (17—19.):

1) $\triangle ABC = \triangle DCE$,

2) $\triangle ACD = \triangle BCE$,

3) $\triangle ACE = \triangle BCD$,

also auch

4) $\square ACBD = \square ECDB$.

und dann

5) $\triangle ADB = \triangle DBE$,

also AE mit BD parallel, mithin

6) $\triangle ADE = \triangle ABE$.

Statt der Dreiecke konnte man auch die Parallelogramme nehmen, aus je zweien dieser Durchmesser construirt.

§. 106. Aufgabe.

Wenn 1) $y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$ gegeben ist, als die Gleichung für eine Linie der zweiten Ordnung, auf Axen bezogen, welche in ihrer ersten Region den beliebig gegebenen Winkel φ bilden, (wo also die Abscissen-Axe allemal Durchmesser, und eine, mit seinen zugehörigen Sehnen parallele Gerade die Ordinaten-Axe ist); man soll die Gleichung finden derselben Curve, auf dieselbe Abscissen-Axe, aber auf eine neue Ordinaten-Axe bezogen, welche parallel mit der alten, durch den Durchschnittspunkt der Curve mit der Abscissen-Axe hindurchgeht, so daß der neue Anfangspunkt in der Curve selbst liegt.

Auflösung. Entweder es ist $\gamma = 0$ (wenn die Curve eine Parabel ist) oder es ist nicht $\gamma = 0$ (im Falle der Ellipse oder Hyperbel).

I. Ist $\gamma = 0$, so ist der Abscissen-Werth x des Durchschnittspunktes der Abscissen-Axe mit der Curve (weil sein Ordinaten-Werth Null ist) gegeben durch die Gleichung:

$$2)\ \alpha + \beta . x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

und dies ist also der Abscissen-Werth der neuen Axe.

Wird daher x_1 der neue Abscissen-Werth irgend eines Punktes genannt, während x seinen alten Abscissen-Werth vorstellt, so hat man nach (§. 7.):

$$3)\ x = -\frac{\alpha}{\beta} + x_1;$$

und setzt man also diesen Werth statt x in die Gleichung (1.) der Curve, so erhält man:

$$4)\ y^2 = \beta . x_1$$

als die Gleichung für die Parabel auf Axen bezogen, welche sich in der Curve schneiden, übrigens den ganz beliebig gegebenen Winkel φ mit einander machen, während die Abscissen-Axe ein Durchmesser der Curve ist, der alle mit der Ordinaten-Axe parallele Sehnen unter demselben Winkel φ halbirt.

II. Ist nicht $\gamma = 0$, so sind die Abscissen-Werthe x (d. h. x' und x'') der Durchschnittspunkte der Abscissen-Axe mit der Curve, gegeben durch die Gleichung:

$$5)\quad \alpha + \beta . x + \gamma . x^2 = 0,$$

oder
$$6)\quad x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma};$$

und nun hat man also die Gleichung:

$$7)\quad x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} + x_1,$$

so daß, wenn dieser Werth von x in die Gleichung (1.) der Curve gesetzt wird

$$8)\quad y^2 = \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} . x_1 + \gamma . x_1^2$$

hervorgeht, welches die Gleichung ist, für die Ellipse oder Hyperbel (je nachdem γ negativ oder positiv ist) auf Axen bezogen, welche sich in der Curve selbst schneiden, übrigens aber denselben beliebig gegebenen Winkel φ mit einander bilden, und wo die Abscissen-Axe ein Durchmesser der Curve ist, welcher die mit der Ordinaten-Axe parallelen Sehnen unter demselben Winkel φ der Axen halbirt.

Anmerkung 1. Wenn der gegebene Winkel φ der Coordinaten ein rechter ist, die Abscissen-Axe also ein Hauptdurchmesser (der seine Sehnen senkrecht halbirt), so nennt man die Durchschnittspunkte desselben mit der Curve die Scheitel der Curve, und die Gleichungen (4. und 8.) werden dann die Scheitelgleichungen der Parabel, Ellipse oder Hyperbel genannt, oder die Gleichungen aus dem Scheitel.

Man wird vielleicht besser thun, die Endpunkte eines jeden Durchmessers, die Scheitel des Durchmessers und dann diese Gleichungen (4.) und (8.) bereits die Scheitelgeichungen zu nennen, auch wenn der Winkel φ kein rechter ist. Wird dann noch der Winkel φ ein rechter, so können die Endpunkte dieses Durchmessers, die Hauptscheitel, und obige Gleichungen dann die Hauptscheitelgleichungen genannt werden. Und in diesem letztern Sinne wollen wir in der Folge diese Worte hier gebrauchen.

Anmerkung 2. In der Gleichung (8.) kommt das (+) oder das (—) Zeichen in Anwendung, je nachdem man den einen oder den andern Endpunkt des Durchmessers zum Anfangspunkt der Coordinaten nimmt. Ist z. B. (Fig. 41.) YAY′ die neue Ordinaten-Axe, XAX′ die Abscissen-Axe, und wie wir bisher immer angenommen haben, rechts oben die erste Region der Axen, so muß in der Gleichung (8.) das (+) Zeichen genommen werden, nehmlich:

$$y^2 = +\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}.x_1 + \gamma.x_1^2,$$

weil für ein sehr kleines positives x_1, y^2 positiv werden muß. Dagegen müßte das (—) Zeichen genommen werden, wenn $Y_2BY'_2$ zur neuen Ordinaten-Axe genommen worden wäre.

In (Fig. 42.) dagegen muß, wenn YAY′ zur neuen Ordinaten-Axe genommen wird, für ein sehr kleines positives x_1, y^2 negativ werden, also muß dann das (—) Zeichen genommen werden, so daß die Gleichung so wird:

$$y^2 = -\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}.x_1 + \gamma.x_1^2,$$

Dagegen wird sie wiederum die Form:

$$y^2 = +\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}.x_1 + \gamma.x_1^2$$

annehmen, sobald $Y_2BY'_2$ zur neuen Ordinaten-Axe genommen wird. Daß übrigens jetzt die neuen Ordinaten-Axen allemal Tangenten der Curve sind, ist aus (§. 95.) bekannt.

§. 107. Zusatz.

Weil die Scheitelgleichung 1) für $x_1 = 0$ auch $y = 0$, 2) für jeden andern Werth von x_1 für y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe liefern muß, so konnte à priori gefolgert werden, daß für die Parabel, Ellipse und Hyperbel jede Scheitelgleichung die Form haben werde:

$$1)\ y^2 = p.x + q.x^2,$$

wo $q = 0$ die Parabel, q negativ die Ellipse und q positiv die Hyperbel liefert. (Vergl. §. 71. n. 7.) Und bezieht man diese Gleichung (1.) auf rechtwinkliche Axen, so ist sie zugleich die Haupt-Scheitelgleichung, während sie sich dagegen auf denjenigen Durchmesser als Abscissen-Axe und seine zugehörige Tangente als Ordinaten-Axe bezieht, welcher seine Sehnen unter dem Winkel φ halbirt, wenn die Gleichung (1.) selbst auf Axen bezogen wird, welche den Winkel φ mit einander bilden. — Dasselbe folgt jedoch jetzt aus (§. 106.).

Wollte man aber in einer beliebigen Linie der 2ten Ordnung (Parabel, Ellipse oder Hyperbel), welche aus der allgemeinen Gleichung:

$$a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$$

auf einen beliebigen Axenwinkel bezogen, construirt worden ist, 1) die Lage eines Durchmessers und seiner zugehörigen Sehnen und Tangenten, 2) die auf den Durchmesser und die Tangenten bezogene Gleichung derselben Curve finden, so darf man nur so verfahren, wie solches (pag. 236.) unten in der Note schon angedeutet ist.

Und fügt man noch die Gleichung:

$$1 + a_1.a_2 + (a_1 + a_2).\cos\varphi = 0$$

hinzu, welche erfüllt seyn muß, wenn diese Axen auf einander senkrecht stehen sollen, so erhält man den Hauptdurchmesser, und die auf ihn bezogene Scheitelgleichung.

§. 108. Zusatz.

Hat man eine Scheitelgleichung:

$$y^2 = \beta x + \gamma x^2$$

für die Ellipse Hyperbel oder Parabel, auf Axen bezogen, die einen gegeben Winkel φ mit einander machen, so reduciren sich die Resultate des (§. 103.), in so ferne man Null statt α setzen muß, auf folgende:

I. Aus (§. 103. I.) — Die Gleichung: $y^2 = \beta . x + \gamma . x^2$ gibt

1) nicht einen einzigen Punkt, wenn γ negativ ist und zugleich $\beta^2 < 0$, d. h. β imaginär; *)

2) nur einen einzigen Punkt, wenn γ negativ und $\beta = 0$ seyn sollte;

3) zwei gerade Linien, wenn γ positiv und $\beta = 0$, oder eine gerade Linie, wenn $\gamma = 0$ und $\beta = 0$;

4) eine Ellipse, wenn γ negativ, aber $\beta^2 > 0$, d. h. β reell, übrigens positiv oder negativ ist;

5) eine Parabel, wenn $\gamma = 0$, aber nicht zugleich $\beta = 0$ ist;

endlich

6) eine Hyperbel, wenn γ positiv, aber zugleich $\beta^2 > 0$, d. h. β positiv oder negativ, aber nicht Null ist.

II. Aus (§. 103. IV.). — Die Abscissen-Werthe der Scheitel (A und B Fig. 41. und 42.) sind gegeben durch die Gleichung: $0 = \beta . x + \gamma . x^2$,

oder
$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2}}{2\gamma},$$

d. h.
$$x' = 0 \quad \text{und} \quad x'' = -\frac{\beta}{\gamma},$$

wenn x' den einen und x'' den andern dieser Werthe von x vorstellt.

---

*) Da alle Coefficienten reell vorausgesetzt werden, so tritt hier dieser Fall eigentlich nie ein. Aus demselben Grunde ist in (I. 6.) von $\beta^2 < 0$ nicht mehr die Rede.

Demnach die Länge des Durchmessers (AB Fig. 41. u. 42.) nach (§. 11.): $= \pm (x' - x'') = \mp \frac{\beta}{\gamma}$,

wo man dasjenige (+) oder (—) Zeichen nimmt, welches den Durchmesser absolut macht, also das (+) Zeichen, wenn $\frac{\beta}{\gamma}$ positiv, das (—) Zeichen dagegen, wenn $\frac{\beta}{\gamma}$ negativ ist. *)

Und der Abscissen-Werth des Mittelpunkts (K Fig. 41. u. 42.) ist:

$$\frac{x' + x''}{2} \quad \text{d. h.} \quad -\frac{\beta}{2\gamma},$$

weshalb auch $\pm \frac{\beta}{2\gamma}$ die Länge des Halbmessers (AK = BK Fig. 41. und 42.) ist.

III. Aus (§. 103. V.). — Die Gleichung des Durchmessers, welcher alle mit der beliebig gegebenen Geraden:

$$y = a_2 . x + b_2$$

parallelen Sehnen halbirt, ist:

$$y = \frac{\gamma}{a_2} . x + \frac{\beta}{2a_2}.$$

Und die Gleichung des ihm zugeordneten Durchmessers:

$$y = a_2 , x + \frac{\beta . a_2}{2\gamma},$$

Und so wie die Gleichungen für die Durchmesser dieselben bleiben, wie (§. 103.), so bleibt auch der Ausdruck für den Winkel, den sie mit einander bilden, hier derselbe, wie dort, weil in diese Ausdrücke α nicht eingegangen ist.

IV. Aus (§. 103. VI.). — Die Abscissen-Werthe der Endpunkte des durch die Gleichung:

$$y = \frac{\gamma}{a_2} , x + \frac{\beta}{2a_2}$$

---

*) Dies gilt nicht mehr für die Parabel, für welche $\gamma = 0$ ist.

gegebenen Durchmessers, sind gegeben durch die Gleichung:

$$\gamma.x^2+\beta.x-\frac{\beta^2}{4(a_2^2-\gamma)}=0;$$

und wenn man die Ordinaten-Werthe dazu findet, so ergibt sich die Länge des Durchmessers 2f nach (§. 14.), d. h.:

$$2f=\frac{\beta}{\sqrt{a_2^2-\gamma}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{a_2}{\gamma}\right)^2+2\frac{a_2}{\gamma}.\cos\varphi}.$$

V. Aus (§. 103. VII.). — Die Länge 2g des diesem zugeordneten und durch die Gleichung:

$$y=a_2.x+\frac{\beta.a_2}{2\gamma}$$

gegebenen Durchmessers ist nun ferner gefunden, nehmlich:

$$2g=\frac{\beta}{\sqrt{-\gamma}.\sqrt{a_2^2-\gamma}}.\sqrt{1+a_2^2+2a_2.\cos\varphi}\;^*).$$

VI. Aus (§. 103. IX.). — Die Gleichung für die Tangente, welche die Curve an einem gegebenen Punkt (x, y) berührt, ist genau so wie dort, nehmlich:

$$y_1-y=\frac{2\gamma.x+\beta}{2y}.(x_1-x).$$

Anmerkung. Man kann fortfahren, die Resultate auch der folgenden (§. §.), namentlich die des (§. 105.), für den gegenwärtigen Fall wiederzugeben, wo $\alpha=0$ ist; man kann aber auch dieselben hier eben hingeschriebene Resultate direkt aus der Gleichung: $y^2=\beta.x+\gamma.x^2$ ableiten, was dem Anfänger besonders empfohlen wird.

Ueberhaupt mag es bequem seyn, bei allen Entwickelungen der speciellen Eigenschaften der Linien der 2ten Ordnung (Ellipse, Hyperbel und Parabel) sich einer Scheitelgleichung zu bedienen,

---

*) In der Ellipse werden beide Formeln für 2f und für 2g reelle Resultate liefern; in der Hyperbel dagegen, wo γ positiv ist, wird die eine der beiden Formeln allemal imaginär seyn, wenn die andere reell ist.

welche nach (§. 71 — 76.) noch alle mögliche dieser Curven vorstellt, also eben so allgemeinwahre Resultate liefert, als solche aus der ursprünglichen Gleichung:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0$$

abgeleitet werden können, welche aber bedeutend einfacher ist, und deshalb dieselben Wahrheiten mit viel weniger Rechnungsmühe und in einfacherer, übersichtlicherer Gestalt liefert.

§. 109. Aufgabe.

Man soll noch mehre Eigenschaften der Tangenten ableiten, in Bezug auf einen Durchmesser und seinen dazugehörigen Tangenten (oder in der Parabel, der einzigen dazugehörigen Tangente).

Auflösung I. Es sey (Fig. 41. und 42.) AB der beliebig gegebene Durchmesser, CMD eine beliebig gegebene Tangente an einem beliebig gegebenen Punkt M oder (x, y); C und D seyen die Durchschnittspunkte derselben mit den, dem Durchmesser AB zugehörigen Tangenten AC und BD; AB, AC die Coordinaten-Axen, und nun zunächst AC:BD und AC.BD zu finden.

Die Scheitelgleichung der Ellipse und Hyperbel, auf die Axen AB und AC bezogen, ist:

$$1)\quad y^2=\beta.x+\gamma.x^2\ *).$$

Die Gleichung für die Tangente CD ist ferner (nach §. 108.):

$$2)\quad y_1-y=\frac{2\gamma.x+\beta}{2y}.(x_1-x).$$

---

*) In der Ellipse (Fig. 41.) ist β positiv, wenn AC, — dagegen negativ, wenn BD zur Ordinaten-Axe genommen ist. In der Hyperbel (Fig. 42.) dagegen ist gerade umgekehrt β negativ oder positiv, je nachdem AC oder BD zur Ordinaten-Axe genommen. Es muß nehmlich für ein sehr kleines positives x, für welches das (+ oder —) Zeichen von $\beta.x+\gamma.x^2$ bloß von dem von β abhängt (E. 47.), wenn AC zur Axe genommen ist, in (Fig. 41.) y^2 positiv, dagegen in (Fig. 42.) y^2 negativ werden.

Nun sind die Abscissen-Werthe

des Punktes A und der Linie AC.....$=0$

des Punktes B und der Linie BD.....$=-\frac{\beta}{\gamma}$

und der Ordinaten-Werth der Punkte C und D ergibt sich daher, wenn man in der Gleichung (2.) für die Tangente, diese Abscissen-Werthe 0 und $-\frac{\beta}{2\gamma}$ statt x_1 setzt, und y_1 dazu berechnet.

Also findet sich

der Ordinaten-Werth von C d. h. AC,

$$=y-\frac{2\gamma.x+\beta}{2y}.x=\frac{2y^2-2\gamma.x^2-\beta.x}{2y}=\frac{\beta.x}{2y},$$

der Ordinaten-Werth von D d. h.

$$\left\{\begin{array}{ll} +BD & \text{in der Ellipse der Fig. 41.} \\ -BD & \text{in der Hyperbel der Fig. 42.} \end{array}\right\}$$

$$=y-\frac{2\gamma.x+\beta}{2y}.\left(\frac{\beta}{\gamma}+x\right)=-\frac{\beta}{2\gamma}.\frac{\gamma.x+\beta}{y}.$$

Also ist in der Ellipse (Fig. 41.):

$$AC:BD=\frac{\beta x}{2y}:-\frac{\beta}{\gamma}.\frac{\gamma x+\beta}{2y}=x:\left(-\frac{\beta}{\gamma}-x\right),$$

d. h. $$AC:BD=AP:BP,$$

weil $AP=x$ und $BP=AB-AP=-\frac{\beta}{\gamma}-x$ ist.

Ferner in derselben Ellipse (Fig. 41.):

$$AC.BD=-\frac{\beta^2.x.(\gamma x+\beta)}{2\gamma y^2}=-\frac{\beta^2}{2\gamma};$$

d. h. in der Ellipse ist das Produkt AC.BD von dem Berührungspunkt (x, y) ganz unabhängig und bleibt also für jede andere Tangente CD immer dasselbe, nehmlich immer $=-\frac{\beta^2}{2\gamma}$.

Ist aber k der Mittelpunkt, so ist sein Abscissen-Werth $= -\frac{\beta}{2\gamma}$.

also sein zugehöriger Ordinaten-Werth der Curve,

$$KL = \sqrt{-\frac{\beta^2}{2\gamma}}, \quad \text{mithin} \quad KL^2 = -\frac{\beta^2}{2\gamma};$$

also

$$AC.BD = KL^2,$$

während KL der dem AK zugeordnete Halbmesser ist.

In der Hyperbel dagegen (Fig. 42.),

wo

$$BD = +\frac{\beta}{2\gamma}.\frac{\gamma.x+\beta}{2y}$$

ist, hat man

$$AC:BD = x:\frac{\beta}{\gamma}+x,$$

d. h.

$$AC:BD = AP:BP,$$

weil

$$AB = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \text{also} \quad BP = \frac{\beta}{\gamma}+x$$

ist.

Solches ist aber gerade so in der Ellipse (Fig. 41.) gefunden worden.

Ferner ist in derselben Hyperbel (Fig. 42.):

$$AC.BD = +\frac{\beta^2}{2\gamma},$$

mithin solches Produkt AC.BD noch immer von dem Berührungspunkt unabhängig, wenn auch nicht mehr dem Quadrat des zugeordneten Halbmessers gleich, weil in der Hyperbel der dem AB zugeordnete Durchmesser die Curve gar nicht trifft.

Da sich übrigens allemal auch

$$AP:BP = CM:DM$$

verhält, wie solches aus der Euklid'schen Geometrie bekannt ist, so läßt sich (Fig. 41 und 42.) die oben gefundene Proportion auch so schreiben:

$$AC:BD = CM:DM = AP:BP. \ *)$$

---

*) Man kann aber von den Figuren völlig abstrahiren, diese Untersuchungen ganz allgemein führen, die Entfernungen AC, BD, AP, BP, etc.,

II. Man kann nun auch noch den Abscissen-Werth des Punktes T suchen in welchem die Tangente CD die Abscissen-Axe trifft. Es ist nehmlich solcher der Werth von x_1 in der

---

ohne eine specielle Figur sich zu denken, nach (§.§. 7 — 14.) ganz allgemein durch die Coordinaten-Werthe ihrer Endpunkte ausdrücken und erhält dann dieselben Resultate, wie sie eben gefunden worden sind für die Ellipse und Hyperbel zugleich, nehmlich:

$$AC : BD = AP : BP = CM : DM$$

und
$$\pm AC.BD = -\frac{\beta^2}{2\gamma},$$

wo sich dann für die Ellipse, wo γ negativ, also $-\frac{\beta^2}{2\gamma}$ positiv ist,

$$+AC.BD = -\frac{\beta^2}{2\gamma},$$

und eben so für die Hyperbel, wo γ positiv ist,

$$-AC.BD = -\frac{\beta^2}{2\gamma} \quad \text{oder} \quad AC.BD = \frac{\beta^2}{2\gamma} \quad \text{absondert.}$$

Dieser letztere Weg, an sich der mühsamere und weniger anschauliche, ist übrigens derjenige, welcher nothwendig betreten werden muß, wenn man mit völliger Ueberzeugung die Resultate für allgemeingültig ansehen will. Wir werden daher in der Folge, wenn wir auch der größern Anschaulichkeit und Deutlichkeit wegen eine Figur zu Grunde legen, doch immer auch noch letztern Weg, der keine specielle Figur voraussetzt, betreten oder doch betreten uns denken, um uns jedesmal ganz allgemein-gültige Resultate zu sichern.

Um aber alle solche Untersuchungen von nun an in diesem Geiste und auf dem bereits in den ersten Kapiteln dieser Schrift betretenen, durchaus Nothwendigkeit und Allgemeinheit der Resultate gewährenden Wege, bequemer verfolgen zu können, wollen wir uns hier einige Bezeichnungen bemerken.

Ist nehmlich P ein Punkt, so soll sein Abscissen-Werth durch P_a, sein Ordinaten-Werth dagegen durch P_o ausgedrückt werden. Eben so solle $(QR)_a$ den Abscissen-Werth der mit der Ordinaten-Axe parallelen Geraden QR, und $(ST)_o$ den Ordinaten-Werth der mit der Abscissen-Axe parallelen S'T vorstellen.

Nach dieser Bezeichnung wird die vorliegende nro. I. der obigen Auflösung sich so gestalten:

Es ist $A_a = 0$, $A_o = 0$,

$B_a = -\frac{\beta}{\gamma}$, $B_o = 0$,

$C_a = 0$, $C_o = \frac{\beta . x}{2y}$,

Gleichung (2.) der Tangente, der zu $y_1 = 0$ gehört, so daß man findet (wegen der Bezeichnung lese man die untere Note):

$$T_a = x - \frac{2y^2}{2\gamma.x+\beta} = -\frac{\beta.x}{2\gamma.x+\beta},$$

so daß der Punkt T rechts oder links vom Scheitel A liegt, je nachdem für den gegebenen Werth von x, $-\frac{\beta.x}{2\gamma.x+\beta}$ positiv oder negativ wird.

$$D_a = -\frac{\beta}{\gamma}, \quad D_o = -\frac{\beta}{2\gamma}.\frac{\gamma.x+\beta}{y},$$
$$P_a = x, \quad P_o = 0,$$
$$M_a = x, \quad M_o = y.$$

Demnach, dem (§. 11.) zu Folge:

$$AC = \pm(A_o - C_o) = \pm\frac{\beta x}{2y},$$

$$BD = \pm(B_o - D_o) = \pm\frac{\beta}{2\gamma}.\frac{\gamma.x+\beta}{y},$$

$$AP = \pm(A_a - P_a) = \pm x,$$
$$BP = \pm(B_a - P_a) = \pm\left(x+\frac{\beta}{\gamma}\right).$$

Dann weiter

$$M_a - C_a = x, \quad M_o - C_o = y - \frac{\beta x}{2y} = \frac{x.(\gamma.x+\frac{1}{2}\beta)}{y},$$

$$M_a - D_a = x+\frac{\beta}{\gamma}, M_o - D_o = y+\frac{\beta}{2\gamma}.\frac{\gamma.x+\beta}{y} = \left(x+\frac{\beta}{\gamma}\right).\frac{\gamma.x+\frac{1}{2}\beta}{y};$$

also nach (§. 14.):

$$MC = +\sqrt{(M_a-C_a)^2+(M_o-C_o)^2+2(M_a-C_a)(M_o-C_o).\cos\varphi}$$
$$= x.\sqrt{1+\left(\frac{\gamma.x+\frac{1}{2}\beta}{y}\right)^2+2\frac{\gamma.x+\frac{1}{2}\beta}{y}.\cos\varphi},$$

$$MD = +\sqrt{(M_a-D_a)^2+(M_o-D_o)^2+2(M_a-D_a)(M_o-D_o).\cos\varphi}$$
$$= \left(x+\frac{\beta}{\gamma}\right).\sqrt{1+\left(\frac{\gamma.x+\frac{1}{2}\beta}{y}\right)^2+2\frac{\gamma.x+\frac{1}{2}\beta}{y}.\cos\varphi},$$

wo allemal von dem doppelten Zeichen ($\pm$) dasjenige genommen werden muß, welches den Ausdruck, dem es vorsteht und der eine Linie ausdrückt, allemal absolut (positiv) macht. — Die obigen Sätze selbst folgern nun hieraus für die Ellipse und die Hyperbel zugleich, für jeden Punkt M, wo man ihn sich auch denken mag.

Für die Parabel, wo $\gamma = 0$ ist, reducirt sich diese Formel auf $T_a = -x$. Es liegt also in der Parabel T links von A, wenn P rechts, oder rechts von A, wenn P links, so daß in der Parabel der Scheitel A des Durchmessers, allemal zwischen dem Punkt P liegt, in welchem die Ordinate des Berührungspunktes den zur Abscissen-Axe genommenen Durchmesser trifft, und dem Punkte T, in welchem die Tangente demselben Durchmesser begegnet.

In der Parabel ist daher allemal

$$PT = \pm(P_a - T_a) = \pm 2x,$$

wo das (+) oder (—) Zeichen gilt, je nachdem x selber positiv oder negativ ist, also je nachdem P rechts oder links von A liegt.

Um aber in der Hyperbel und Ellipse PT uns zu verschaffen, müssen wir nach (§. 11.) die Abscissen-Werthe von P und T von einander subtrahiren und die Differenz absolut nehmen; und man erhält daher:

$$PT = \pm\left(-\frac{\beta . x}{2\gamma . x + \beta} - x\right)$$

$$= \pm\frac{2x.(\gamma x + \beta)}{2\gamma x + \beta} = \pm\frac{!y^2}{(\gamma . x + \frac{1}{2}\beta)},$$

welches Resultat natürlich auch noch für die Parabel gilt. *)

Man nennt aber diese Linie PT, für den Fall, daß die Coordinaten-Axen senkrecht auf einander stehen, die zu dem Punkte (x, y) gehörige Subtangente; und man kann also schreiben:

---

*) In den Anwendungen muß man für jeden speciellen Fall von den beiden (+) oder (—) Zeichen dasjenige jedesmal nehmen, welches PT absolut macht, also das (+) Zeichen, wenn $\gamma . x + \frac{1}{2}\beta$ positiv, dagegen das (—) Zeichen, wenn $\gamma . x + \frac{1}{2}\beta$ negativ ist. Und ganz unrichtig wäre es, wenn man etwa blos, wie solches zuweilen geschieht,

$$PT = \frac{y^2}{(\gamma . x + \frac{1}{2}\beta)}$$

nehmen, und aus dem Zeichen, welches dieser Ausdruck rechts erhält, folgern wollte, daß T links oder rechts des gegebenen Punktes P liege.

$$subtang = \pm \frac{y^2}{(\gamma x + \frac{1}{2}\beta)},$$

welche Formel für die Ellipse und Hyperbel, wie für die Parabel gilt. Hier, wie bisher immer, ist jedoch vorausgesetzt, daß die Abscissen-Axe ein beliebiger der Durchmesser ist, und daß φ der Winkel ist, den die Axen mit einander machen, unter welchem also zugleich dieser Durchmesser seine zugehörigen Sehnen schneidet.

In der Parabel, wo $y = 0$ ist, wird $subtang = \pm 2x$.

III. Für den Fall, daß die Coordinaten-Axen senkrecht auf einander stehen, wo hier die Abscissen-Axe mit einem der Haupt-Durchmesser zusammenfällt, denkt man sich auch noch durch den Berührungspunkt M eine Gerade MW senkrecht auf die Tangente CDM, welche die Abscissen-Axe in dem Punkte W trifft, und man nennt diese senkrechte dann schlechtweg die Normale, so wie PW die Subnormale. — Diese Subnormale kann man auf gedoppeltem Wege finden. Einmal fällt in die Augen, daß P immer zwischen T und W fallen muß, es mag T rechts oder links von P fallen, also hat man immer ein rechtwinkliches Dreieck TMW, in welchem die senkrechte Linie MP auf die Hypothenuse gefällt ist, und daher allemal die Proportion:

$$PT : PM = PM : PW$$

oder

$$subtg. : y = y : subnorm;$$

also

$$subnorm = \frac{y^2}{subtg},$$

d. h.

$$subnorm = \pm(\gamma . x + \tfrac{1}{2}\beta),$$

wo auch jedesmal dasjenige (+) oder (—) Zeichen vorgesetzt bleibt, welches die *subnorm* absolut macht; und wo es unrichtig wäre, bloß $subnorm = (\gamma . x + \frac{1}{2}\beta)$ zu setzen und daraus nachher abzunehmen, je nachdem $\gamma . x + \frac{1}{2}\beta$ positiv oder negativ würde, ob der Punkt W rechts oder links von P liegt. *)

---

*) Ob ein Punkt mehr rechts oder mehr links als ein anderer liegt, kann man bloß daran erkennen, daß man die Abscissen-Werthe dieser

In der Parabel, wo $y=0$ ist, wird also

$$subnorm = \pm\tfrac{1}{2}\beta,$$

mithin von x unabhängig, und bleibt daher für jeden andern Berührungspunkt allemal dieselbe.

Der andere Weg, die Subnormale zu finden, besteht darin, daß man die Gleichung sucht der Linie MW; daraus den Durchschnittspunkt W derselben mit der Abscissen-Axe, und dann nach (§. 11.) die Entfernung PW. — Es ist aber die Gleichung der Tangente CMD, wenn x_1 und y_1 die Coordinaten-Werthe ihrer einzelnen Punkte sind:

$$y_1 - y = \frac{2\gamma . x + \beta}{2y}(x_1 - x),$$

also die Gleichung der auf ihr senkrechten und durch denselben Punkt (x, y), d. h. M, hindurchgehenden Geraden MW (nach §. 38.):

$$y_2 - y = -\frac{2y}{2\gamma . x + \beta}.(x_2 - x),$$

wo x_2 und y_2 die Coordinaten-Werthe der einzelnen Punkte von MW vorstellen. Der Abscissen-Werth des Durchschnittspunktes W der Axe mit dieser Geraden ist nun der Werth von x_2, welcher sich für $y_2 = 0$ ergibt, also:

$$W_a = x + \frac{2\gamma . x + \beta}{2y} . y = x + (\gamma x + \tfrac{1}{2}\beta);$$

demnach nach (§. 11.):

$$PW = \pm(W_a - P_a) = \pm(\gamma . x + \tfrac{1}{2}\beta).$$

Hätte man die Coordinaten-Axen, wie bisher, nicht gerade rechtwinklich, sondern unter einem beliebigen Winkel φ angenommen, so daß nicht der Haupt-Durchmesser, sondern ein anderer

---

Punkte findet. Je kleiner der Abscissen-Werth ist (E. 13.), desto mehr links liegt der Punkt, so daß von zwei Punkten derjenige rechts des andern liegt, der den größern Abscissen-Werth hat.

der Durchmesser die Abscissen-Axe bildete, verstände man aber unter Normale noch immer die auf die Tangente senkrechte Linie MW, so wie unter Subnormale die PW, so wäre die Gleichung der Linie MW jetzt nach (§. 37.):

$$y_2 - y = -\frac{y + (\gamma . x + \frac{1}{2}\beta) . \cos\varphi}{(\gamma . x + \frac{1}{2}\beta) + y . \cos\varphi} . (x_2 - x);$$

und daraus dann die Subnormale:

$$PW = \pm y . \frac{(\gamma . x + \frac{1}{2}\beta) + y . \cos\varphi}{y + (\gamma . x + \frac{1}{2}\beta) . \cos\varphi}.$$

IV. Immer unter der Voraussetzung, daß der Coordinaten-Axen-Winkel ein beliebig gegebener φ ist, welchen der zur Abscissen-Axe genommene Durchmesser mit seinen zugehörigen Sehnen bildet, ergeben sich nun noch leicht folgende Eigenschaften der Tangente.

1) In der Ellipse und in der Hyperbel, wenn K der Mittelpunkt ist, (Fig. 41. und 42.) ist allemal:

$$KP : KA = KA : KT.$$

Denn es ist

$$K_a = -\frac{\beta}{2\gamma},\ K_o = 0;$$

also

$$KP = \pm(K_a - P_a) = \mp\left(\frac{\beta}{2\gamma} + x\right),$$

$$KA = \pm(K_a - A_a) = \mp\frac{\beta}{2\gamma},$$

$$KT = \pm(K_a - T_a) = \mp\left(\frac{\beta}{2\gamma} - \frac{\beta x}{2\gamma x + \beta}\right) =$$

$$= \mp\frac{\beta^2}{2\gamma(2\gamma x + \beta)};$$

also

$$KP . KT = \frac{\beta^2}{4\gamma^2} = KA^2.$$

2) Aus dieser Proportion:

$$KP : KA = KA : KT$$

folgt aber noch

$$KP:KA \mp KP = KA:KT \mp KA,$$

d. h. $KP:AP = KA:AT$

und $KP:BP = KA:BT.$

Anmerkung. Aus diesen Verhältnissen und Proportionen, kann man auch auf dem Wege der Euklid'schen Geometrie neue Folgerungen gründen. So kann man z. B. noch eine Tangente dmc legen, und es folgt dann noch in der Ellipse (Fig. 41.), wie in der Hyperbel (Fig. 42.):

$$AC.BD = Ac.Bd,$$

also auch

$$AC:Ac = Bd:BD,$$

$$AC:AC - Ac = Bd:Bd - BD,$$

d. h. $AC:Cc = Bd:dD;$

also auch $AC:Bd = Cc:dD = Cp:Dp = cp:dp,$

wenn p der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten ist; und dergl. mehr.

Auch hierüber lese man den 2ten Theil der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen.

Wir begnügen uns mit der Entwickelung dieser Eigenschaften der Tangenten, und gehen zur Aufsuchung neuer Eigenschaften über.

§. 110. Aufgabe.

Es ist gegeben eine der Scheitelgleichungen:

$$1)\ y^2 = \beta.x + \gamma.x^2$$

der Linien der 2ten Ordnung, auf einen beliebigen der Durchmesser als Abscissen-Axe bezogen. In dieser Abscissen-Axe ist ein Punkt F gegeben durch seinen Abscissen-Werth F_a, und ein Punkt M der Curve, gegeben durch ihre beiden Coordinaten-Werthe M_a und M_o, welche vorzugsweise durch x und durch y vorgestellt seyn mögen, so daß $M_a = x$ und $M_o = y$ ist; man soll die Linie FM finden.

Auflösung. Es ist nach (§. 14.):

2) $FM = + \sqrt{(F_a - M_a)^2 + (F_o - M_o)^2 + 2(F_a - M_a)(F_o - M_o) \cdot \cos\varphi}$

$= + \sqrt{(F_a - x)^2 + y^2 - 2(F_a - x)y \cdot \cos\varphi}$,

in so ferne F in der Abscissen-Axe liegt, sein Ordinaten-Werth F_o also $=0$ ist. Und wenn man hier für y^2 und für y ihre Werthe in x setzt, so findet sich:

3) $FM = + \sqrt{(F_a - x)^2 + \beta . x + \gamma . x^2} - 2(F_a - x) . \cos\varphi . \sqrt{(\beta . x + \gamma . x^2}$.

§. 111. Zusatz.

Man kann nun denjenigen Durchmesser als Abscissen-Axe und auf diesem denjenigen Punkt F suchen, für welchen diese Linie FM in x sich rational ausdrücken läßt; d. h. in x ohne Wurzelzeichen.

Für's erste sieht man, daß solches nicht möglich ist, so lange nicht $\varphi = 90°$, d. h. so lange nicht der Punkt F in einem der Haupt-Durchmesser liegt. Es wird aber für $\varphi = 90°$,

1) $FM = + \sqrt{(F_a - x)^2 + \beta . x + \gamma . x^2}$

$= + \sqrt{F_a{}^2 + (\beta - 2F_a) . x + (\gamma + 1) . x^2}$.

Damit nun dieser Ausdruck rational werde, muß nach (E. 24 — 25.):

2) $(\gamma + 1) . F_a{}^2 = (\frac{1}{2}\beta - F_a)^2$

seyn, oder, nach F_a geordnet,

3) $\gamma . F_a{}^2 + \beta . F - \frac{1}{4}\beta^2 = 0$.

In der Parabel, wo $\gamma = 0$ ist, findet sich daher für F_a ein einziger Werth, nehmlich:

4) $F_a = \frac{1}{4}\beta$.

In der Ellipse und Hyperbel dagegen finden sich für F_a zwei Werthe, nehmlich:

$$5)\ F_a = \frac{-\beta \pm \beta\sqrt{1+\gamma}}{2\gamma}$$

$$= \frac{\beta}{2\gamma}.(-1 \pm \sqrt{1+\gamma}),$$

welche beide Werthe in der Hyperbel, wo γ positiv ist, immer reell sind, dagegen in der Ellipse nur dann reell, wenn $1+\gamma$ positiv, also $1+\gamma > 0$, d. h. $\gamma > -1$ ist. *).

Dabei wird dann

$$6)\ FM = F_a + x.\sqrt{1+\gamma} = F_a + \frac{\frac{1}{2}\beta - F_a}{F_a}.x,$$

Es hat also die Parabel in ihrem einzigen Haupt-Durchmesser allemal einen solchen Punkt, die Hyperbel allemal zwei dergleichen, und zwar in demjenigen der Haupt-Durchmesser, welcher die Curve wirklich trifft; und die Ellipse hat wahrscheinlich ebenfalls zwei dergleichen Punkte, wenn nicht in dem einen, so vielleicht doch in dem andern zugehörigen Haupt-Durchmesser.

Anmerkung 1. Und da diese Punkte die Eigenschaft haben, daß ihre Abstände von beliebigen Punkten (x, y) der Curve rational in x (oder y) ausgedrückt werden können, während dies für keinen der übrigen Punkte der Fall ist, so werden für diese Punkte vor allen andern bei der Entwicklung der Eigenschaften dieser Curven aus ihrer Gleichung, wegen der einfachern For-

---

*) Die Ellipse und die Hyperbel haben immer zwei Haupt-Durchmesser. Geht man von der Scheitelgleichung aus, so ist allemal derjenige der Durchmesser zur Abscissen-Axe genommen, welcher die Curve wirklich trifft, d. h. welcher wirklich einen Scheitel hat. Auf diesem finden sich also in der Hyperbel allemal zwei solche Punkte F. Wenn sich aber in der Ellipse nicht immer zwei solche Punkte F auf dem zur Abscissen-Axe genommenen Haupt-Durchmesser finden, so wird doch die Folge lehren, daß dann jedesmal auf dem andern der Haupt-Durchmesser zwei solche Punkte liegen, deren Entfernung von einem beliebigen Punkt M der Curve, in x oder y rational ist.

meln, die diesen Punkten allein entsprechen, einfache Resultate als Eigenschaften derselben ausgemittelt werden können.

Man hat aber diese Punkte bisher immer Brennpunkte genannt, einer Eigenschaft wegen, welche sie in der Anwendung zeigen.

Anmerkung 2. Um uns zu überzeugen, ob die Ellipse allemal wirklich Brennpunkte habe, kommt alles darauf an, ob man in der Ellipse allemal einen der beiden Haupt-Durchmesser wird zur Abscissen-Axe nehmen können, so daß in der darauf bezogenen Scheitelgleichung:

$$y^2 = \beta . x + \gamma . x^2$$

der Coefficient γ die Eigenschaft erhält, daß $1 + \gamma$ positiv werde.

Zu dem Ende nehmen wir am bequemsten eine Gleichung der Curve zu Hilfe, welche die Mittelpunkts-Gleichung genannt wird, und in welcher zwei zusammengehörige Durchmesser die Axen sind. Solche ist natürlich nur bei der Ellipse und Hyperbel denkbar.

§. 112. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Ellipse oder Hyperbel durch die Scheitelgleichung:

$$1)\quad y^2 = \beta . x + \gamma . x^2 \quad *)$$

auf Axen bezogen, welche den Winkel φ mit einander bilden. Man soll die Mittelpunkts-Gleichung derselben Curve finden, für denselben Durchmesser als Abscissen-Axe, aber dem zugehörigen Durchmesser als Ordinaten-Axe.

---

*) Statt daß die Curve durch die Scheitelgleichung gegeben ist, kann sie auch durch die beliebige, auf den Durchmesser als Abscissen-Axe bezogene Gleichung: $y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$ gegeben seyn; und der Gang der Auflösung dieser Aufgabe leidet fast keine Aenderung.

Auflösung. Da der zugehörige Durchmesser den Durchmesser als Abscissen-Axe unter demselben Winkel φ schneidet, d. h. da die neue Ordinaten-Axe mit der alten parallel läuft, da ferner der Abscissen-Werth der neuen Ordinaten-Axe, in so ferne sie durch den Mittelpunkt durchgeht,

$$= -\frac{\beta}{2\gamma}$$

ist, so hat man nach (§. 7.):

$$2)\quad x = -\frac{\beta}{2\gamma} + x_1,$$

wenn x_1 den neuen, x den alten Abscissen-Werth irgend eines Punktes ausdrückt.

Substituirt man aber diesen Werth statt x in die Gleichung: $y^2 = \beta . x + \gamma . x^2$, so erhält man:

$$y^2 = \beta\left(-\frac{\beta}{2\gamma} + x_1\right) + \gamma\left(-\frac{\beta}{2\gamma} + x_1\right)^2$$

d. h. $$y^2 = -\frac{\beta^2}{4\gamma} + \gamma . x_1^2,$$

oder $$4)\quad y^2 = \alpha + \gamma . x_1^2,$$

wenn $-\frac{\beta^2}{4\gamma}$ durch α vorgestellt wird.

Und dies ist die gesuchte Mittelpunkts-Gleichung, welche die Ellipse gibt, wenn γ negativ, die Hyperbel dagegen, wenn γ positiv ist. —

Anmerkung 1. In der Ellipse ist α nothwendig positiv, in der Hyperbel, in so ferne hier derjenige der zusammengehörigen Durchmesser zur Abscissen-Axe genommen ist, welcher die Curve wirklich trifft, in so ferne also hier $\alpha = -\frac{\beta^2}{4\gamma}$ ist, muß α allemal negativ seyn.

Anmerkung 2. Unter allen Mittelpunkts-Gleichungen mag diejenige die Haupt-Mittelpunkts-Gleichung heißen, welche

sich auf die Haupt-Durchmesser als Coordinaten-Axen bezieht, wo also $\varphi = 90^\circ$ ist.

Anmerkung 3. Diese Mittelpunkts-Gleichung ist auch schon (§. 71. n. 6.) gefunden; wo zwei neue Axen:

1) $y = a_1 . x + b_1$ und 2) $y = a_2 . x + b_2$

so gesucht worden sind, daß die Gleichung der Curve die Form bekommt:

$$3)\quad A . u^2 + C . t^2 + F = 0.$$

Und nimmt man dort noch die Gleichung:

$$1 + a_1 . a_2 + (a_1 + a_2) . \cos\varphi = 0$$

zu Hilfe, welche bewirkt, daß die neuen Axen senkrecht auf einander stehen, so hat man sogleich die Haupt-Mittelpunkts-Gleichung, und in den gefundenen neuen Axen die Haupt-Durchmesser.

§. 113. Zusatz.

Man kann aber in der Gleichung:

$$1)\quad y^2 = \alpha + \gamma . x^2$$

wo α positiv und γ negativ für die Ellipse, dagegen α negativ und γ positiv für die Hyperbel gedacht ist (nach §. 112.), die Coordinaten-Axen vertauschen, so daß der andere Durchmesser die Abscissen-Axe wird, und y dann den Abscissen und x den Ordinaten entspricht; und man kann dann die Gleichung (1.) auch noch so schreiben:

$$x^2 = -\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} . y^2$$

oder $$2)\quad x^2 = \alpha' + \gamma' . y^2,$$

wo y die Abscissen-Werthe, x aber die Ordinaten-Werthe vorstellt, während

$$3)\ \alpha' = -\frac{\alpha}{\gamma} \quad \text{und} \quad 4)\ \gamma' = \frac{1}{\gamma}$$

gedacht worden ist.

Gesetzt nun die Gleichung (1.) drücke eine Hyperbel aus,

also γ sey positiv und α wie oben negativ gedacht, so ist $-\frac{\alpha}{\gamma}$ oder α' nothwendig positiv, während $\frac{1}{\gamma}$ oder γ' noch positv ist aber nothwendig $\gamma' \gtrless 1$, wenn $\gamma \gtrless 1$ war. Ist also α positiv in der Gleichung (1.), so ist derjenige Durchmesser der Hyperbel zur Abscissen-Axe genommen, welcher die Curve nicht trifft.

In der Ellipse wo α positiv, γ negativ gedacht ist, hat man $\alpha' = -\frac{\alpha}{\gamma}$ noch positiv und $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$ noch negativ. — Ist aber $1+\gamma<0$, d. h. $\gamma<-1$, d. h. γ absolut genommen >1, so ist $\frac{1}{\gamma}$ oder γ', absolut abgenommen, <1, also an sich $\gamma'>-1$ oder $1+\gamma'>0$, d. h. $1+\gamma'$ positiv.

Bringt man aber diese Resultate mit der Formel (§. 111. n. 5.) in Verbindung, so erhellet, daß in allen den Fällen, wo auf dem einen der beiden Hauptdurchmesser der Ellipse keine Brennpunkte liegen, in so ferne der Ausdruck für F_a imaginär wird, in denselben Fällen zwei Brennpunkte allemal in dem andern der Haupt-Durchmesser liegen; so daß auch die Ellipse, wie die Hyperbel, allemal zwei Brennpunkte wirklich hat.

§. 114. Zusatz.

Wir können nun auch direkt die Coordinaten-Werthe der Brennpunkte aus der Haupt-Mittelpunkts-Gleichung:

$$1)\quad y^2 = \alpha + \gamma . x^2$$

suchen, wo für die Ellipse α nothwendig positiv, γ aber negativ, für die Hyperbel jedoch γ positiv, α dagegen positiv oder negativ seyn kann, jenachdem man sich den Haupt-Durchmesser, der die Curve trifft, oder den andern zur Abscissen-Axe genommen denkt, während x die Abscissen-Werthe, y dagegen die Ordinaten-Werthe bedeutet.

Stellt nehmlich F einen beliebigen der beiden Brennpunkte vor, und $F_{(a)}$ seinen Abscissen-Werth (aus dem Mittelpunkt, als jetzigen Anfangspunkt der Coordinaten genommen), so ist für jeden Punkt M der Curve, dessen Coordinaten-Werthe vorzugsweise durch x und durch y vorgestellt seyn sollen, weil jetzt die Axen rechtwinkiich sind

$$2)\quad FM = +\sqrt{(F_{(a)}-x)^2+y^2} = \sqrt{(F_{(a)}-x)^2+\alpha+\gamma.x^2}$$
$$= \sqrt{F_{(a)}{}^2+\alpha-2F_{(a)}.x+(1+\gamma).x^2}.$$

Und damit dieser Ausdruck rational werde nach x, wodurch sich eben der Brennpunkt als solcher auszeichnet, so hat man nach (E. 24 — 25.):

$$3)\quad F_{(a)}{}^2 = (1+\gamma)(F_{(a)}{}^2+\alpha)$$

d. h. $$0 = (1+\gamma).\alpha+\gamma.F_{(a)}{}^2,$$

mithin

$$4)\quad F_{(a)} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha(1+\gamma)}{\gamma}} = \pm\sqrt{-\alpha\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

§. 115. Zusatz.

Es erhellet aber hieraus, (d. h. aus §. 114. n. 4.):

1) In der Ellipse, wo γ negativ ist, α aber nothwendig positiv, sind diese beiden Werthe nur dann reell, wenn $1+\frac{1}{\gamma}$ negativ, also wenn γ, absolut genommen, kleiner als 1 ist.

2) In der Hyperbel (wo γ positiv ist, und α negativ, wenn die Abscissen-Axe die Curve trifft, dagegen α positiv, wenn die Abscissen-Axe die Curve nicht trifft) sind diese beiden Werthe von $F_{(a)}$ nur dann reell, wenn α negativ ist; d. h. die Hyperbel hat ebenfalls nur zwei Brennpunkte und diese liegen auf demjenigen der beiden Haupt-Durchmesser, welcher die Curve trifft.

3) In der Ellipse, wie in der Hyperbel stehen die beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt gleich weit ab.

§. 116. Aufgabe.

Von einer Ellipse sind gegeben zwei zusammengehörige Halbmesser h und k, man soll die Mittelpunktsgleichung und die Scheitelgleichung finden, für diese Durchmesser als Axen und zwar den erstern 2h in der Abscissen-Axe, den andern 2k in der Ordinaten-Axe gedacht. (Fig. 41.).

Auflösung I. Die Mittelpunktsgleichung ist:

1) $y^2 = \alpha + \gamma x^2$

wenn sie auf denselben Axen-Winkel φ bezogen, den die beiden gegebenen, einander zugeordneten Durchmesser 2h und 2k mit einander bilden; wo nur noch α und γ gefunden werden müssen.

Nun ist aber für $y = 0$, $x = \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$; also $\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ der Abscissen-Werth des Scheitels, mithin

2) $h = +\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$.

Ferner wird für $x = 0$, $y = \pm\sqrt{\alpha}$, mithin

3) $k = +\sqrt{\alpha}$.

Und aus diesen beiden Gleichungen (2. und 3.) findet sich nun:

4) $\alpha = k^2$ und 5) $\gamma = -\frac{k^2}{h^2}$.

Und deshalb ist die gesuchte Mittelpunktsgleichung:

6) $y^2 = k^2 - \frac{k^2}{h^2}.x^2 = \frac{k^2}{h^2}.(h^2 - x^2)$.

II. Die Scheitelgleichung dagegen ist:

1) $y^2 = \beta.x + \gamma.x^2$.

Für $y = 0$ wird $x = 0$ und $x = -\frac{\beta}{\gamma}$, also ist, wenn (Fig. 41.) AC (nicht BD) zur Ordinaten-Axe genommen wird:

2) $2h = -\frac{\beta}{\gamma}$. *)

Dann wird für $x = -\frac{\beta}{2\gamma}$, welches der Abscissen-Werth des Mittelpunkts ist, das dazugehörige $y = \frac{\beta}{2\sqrt{-\gamma}}$;

also 3) $2k = \frac{\beta}{\sqrt{-\gamma}}$.

Und aus (2. und 3.) findet sich nun:

4) $\gamma = -\frac{k^2}{h^2}$ und 5) $\beta = \frac{2k^2}{h}$ **).

Also die Scheitelgleichung:

6) $y^2 = \frac{2k^2}{h} . x - \frac{k^2}{h^2} . x^2 = \frac{k^2}{h^2} . (2hx - x^2)$ ***).

Anmerkung 1. Diese Gleichungen (I. 6. und II. 6.) sind zugleich die Haupt-Mittelpunktsgleichung und die Haupt-Scheitelgleichung, wenn h und k die Haupt-Halbmesser sind, die Axen also senkrecht auf einander stehen.

Anmerkung 2. Sind k und h die Haupt-Halbmesser der Ellipse, so nennt man den größern davon die halbe große Axe, den kleinern dagegen die halbe kleine Axe der Ellipse. Sind aber diese beiden Haupt-Halbmesser h und k, einander

---

*) Dagegen $2h = +\frac{\beta}{\gamma}$ wenn BD zur Ordinaten-Axe genommen wird.

**) Dagegen $\beta = -\frac{2k^2}{h}$, wenn BD die Ordinaten-Axe seyn sollte.

***) Solche würde aber

$$y^2 = \frac{k^2}{h^2} . (-2hx - x^2)$$

werden, wenn BD die Ordinaten-Axe wäre.

gleich, so nennt man diese Ellipse insbesondere eine Kreislinie; und daß diese letztere von der in den Elementen behandelten nicht verschieden ist, erhellet aus dem Umstand, daß dann die Gleichung (I. 6.) in

$$y^2 + x^2 = h^2$$

übergeht, so daß also alle Punkte der Curve von dem Mittelpunkt um dieselbe Entfernung h abstehen.

Dieselbe Gleichung bleibt zwar noch, wenn $k = h$ genommen wird, dabei aber h und k nicht als Haupt-Halbmesser, sondern als solche, die einen spitzen oder stumpfen Winkel φ mit einander machen. Allein dann drückt $x^2 + y^2$ nicht die Entfernung aus des Punktes (x, y) von dem Mittelpunkte, und dann sind also nicht mehr alle Punkte der Curve

$$y^2 + x^2 = h^2$$

von dem Mittelpunkt gleich weit entfernt *).

Uebrigens erhellet, daß alles, was für jede Ellipse gilt, nothwendig auch für diejenige gelten müsse, welche insbesondere Kreislinie genannt wird.

§. 117. Zusatz.

Da übrigens die Brennpunkte der Ellipse nur auf demjenigen der beiden Haupt-Durchmesser liegen, für welchen als

---

*) Im Gegentheil: sollen nun alle Punkte der Curve doch gleichweit und um h vom Mittelpunkt entfernt seyn, so müßte die Gleichung die Form haben (nach §. 14.):

$$y^2 + x^2 + 2xy \cdot \cos\varphi = h^2.$$

Und dies wäre also die Gleichung für eine Kreislinie, auf zwei sich im Mittelpunkt schneidende Axen bezogen, welche den Winkel φ mit einander bilden.

Und gingen die Axen nicht durch den Mittelpunkt, sondern so, daß p und q die Abscissen-Werthe des Mittelpunkts sind, so wäre die Gleichung derselben Kreislinie, deren Radius h ist:

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 + 2(x_1 - p)(y_1 - q) \cdot \cos\varphi = h^2;$$

also

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = h^2,$$

sobald die Axen senkrecht auf einander stehen.

Abscissen-Axe genommen, der absolut gedachte Werth von γ, d. h. $\frac{k^2}{h^2}$ kleiner als 1 wird, also $h > k$, so folgt, daß die Brennpunkte der Ellipse jedesmal auf der großen Axe der Ellipse liegen; d. h. auf dem größten der beiden Haupt-Durchmesser.

§. 118. Zusatz.

In der Hyperbel trifft nur einer der zusammengehörigen Durchmesser die Curve; und wenn dieser Halbmesser $= h$ gesetzt und zur Abscissen-Axe genommen wird, so kann man die Mittelpunkts- und die Scheitel-Gleichung suchen in h ausgedrückt (Fig. 42.).

Man hat aber zur Auflösung dieser Aufgabe noch immer die Gleichungen (§. 116. I. 2.), nehmlich:

$$1)\quad h = +\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$$

und (§. 116. II. 2.), nehmlich:

$$2)\quad 2h = \mp\frac{\beta}{\gamma},$$

wo jedoch das (—) Zeichen gilt, wenn AC, das (+) Zeichen dagegen, wenn BD zur Ordinaten-Axe genommen wird. Aus (1.) folgt nun:

$$3)\quad \alpha = -\gamma h^2$$

so wie aus (2.):

$$4)\quad \beta = \mp 2\gamma h,$$

so daß also die Mittelpunkts-Gleichung:

$$5)\quad y^2 = \gamma(x^2 - h^2)$$

und die Scheitelgleichung:

$$6)\quad y^2 = \gamma(x^2 \mp 2hx)$$

seyn wird, für alle mögliche Hyperbeln, welche denselben Halbmesser h zur Abscissen-Axe haben, und auf denselben Axen-Win-

kel φ bezogen sind, wenn man nur statt y jeden beliebigen positiven Werth setzt, und dabei das (—) Zeichen gelten läßt, wenn AC, das (+) Zeichen dagegen, wenn BD zur Ordinaten-Axe genommen ist; immer unter der ein für allemal gemachten und unverändert bleibenden Voraussetzung, daß rechts oben die erste Region der Axen liegt.

Damit nun diese Gleichungen für die Hyperbel dieselbe Form bekommen mögen, wie vorher für die Ellipse, so setzt man

$$y = \frac{k^2}{h^2},$$

wo k^2 keine andere Bedeutung hat, als daß es das Produkt $y.h^2$ vorstellt, also positiv ist; und dann sind die Gleichungen

$$7)\quad y^2 = \frac{k^2}{h^2}(x^2 - h^2)$$

und

$$8)\quad y^2 = \frac{k^2}{h^2}(x^2 \mp 2hx)$$

die Mittelpunkts- und die Scheitel-Gleichungen für alle eben gedachten Hyperbeln, die sich daher auch auf die Haupt-Durchmesser beziehen können, wenn man den Winkel $\varphi = 90°$ nimmt.

Anmerkung. Weil aber die Gleichungen (§. 116. I. 6. und II. 6.) in die hiesigen (7. 8.) übergehen, wenn man, wo dort k^2 steht, $-k^2$ dafür setzt, also $k\sqrt{-1}$ statt k schreibt, so hat dies Veranlassung zu der unpassenden Redensart gegeben, als sey die kleine Axe der Hyperbel imaginär. Man muß sich aber die Sache so denken. Weil diese letztern Gleichungen aus jenen hervorgehen, wenn $k\sqrt{-1}$ statt k gesetzt wird, so wird alles, was aus jenen Gleichungen calculativ abgeleitet ist, als aus den hiesigen Gleichungen abgeleitet betrachtet werden können, wenn man sich nur überall $k\sqrt{-1}$ statt k denkt. Die so analytisch ausgesprochenen Eigenschaften der Ellipse liefern daher dann zugleich auch Eigenschaften der Hyperbel, wenn man nur die Resultate dadurch umändert, daß man überall $k\sqrt{-1}$ statt k schreibt.

Oder mit andern Worten: Dieselben Gleichungen (§. 116. I. 6. und II. 6.) stellen die Ellipse und die Hyperbel noch zu gleicher Zeit vor, die Ellipse, wenn man für k eine reelle Zahl setzt, die Hyperbel, wenn man k imaginär und von der Form $k_1.\sqrt{-1}$ nimmt, so daß man die Eigenschaften der Ellipsen und der Hyperbeln noch gemeinschaftlich aus denselben Gleichungen des (§. 116.) ableiten kann.

Für den Fall daß die vorstehenden Gleichungen sich auf die Haupt-Durchmesser beziehen, heißt h die halbe reelle Axe und k wohl auch, obwohl noch unpassender, die halbe imaginäre Axe der Hyperbel.

§. 119. Erklärung.

In jeder Scheitelgleichung:

$$y^2 = \beta.x + \gamma.x^2$$

für die Parabel, Ellipse oder Hyperbel, heißt das absolute Glied des (positiven oder negativen) Coefficienten β, der zu dieser Abscissen-Axe gehörige Parameter. Er wird der Haupt-Parameter genannt, wenn die Scheitelgleichung zu gleicher Zeit die Haupt-Scheitelgleichung ist.

Anmerkung. In der Ellipse hat also die große Axe und die kleine Axe, jede für sich ihren bestimmten Parameter. Aehnliches gilt auch von der Hyperbel.

§. 120. Zusatz.

1) Die Parabel ist durch ihren Parameter ganz und völlig gegeben, sobald der Axenwinkel φ bekannt ist, auf den sich die Gleichung: $y^2 = \beta.x$ beziehen soll.

2) Die Ellipse uud die Hyperbel ist durch den Parameter β und durch ihren einen Halbmesser völlig gegeben. — Denn man hat, wenn h dieser Halbmesser ist, die Gleichung:

$$2h = \mp\frac{\beta}{\gamma} \quad \text{also} \quad \gamma = \mp\frac{\beta}{2h},$$

also die Gleichung: $y^2 = \beta x \mp \frac{\beta}{2h} x^2$,

d. h. $y^2 = \beta . x \left(1 \mp \frac{1}{2h} x\right)$.

3) In der Ellipse ist der Parameter

$$\pm \beta = \frac{k^2}{2h},$$

wenn h und k zwei zusammengehörige Halbmesser sind, wovon h in der Abscissen-Axe liegt, der andere k dagegen mit der Ordinaten-Axe parallel läuft. — In der Hyperbel dagegen gibt man dem Parameter gern dieselbe Form:

$$\pm \beta = \frac{k^2}{2h}$$

damit die Scheitelgleichung die Form

$$y^2 = \frac{k^2}{h^2}(\mp 2hx + x^2)$$

annehmen möge.

4) Durch den Parameter $\pm\beta$ und den Abstand d des Brennpunkts vom Scheitel (der zum Anfangspunkt der Coordinaten-Axen genommen ist), ist die Ellipse und Hyperbel ebenfalls gegeben. — Denn es ist nach (§. 111.):

$$d = \pm \frac{\beta}{2\gamma}\left(-1 + \sqrt{\gamma + 1}\right),$$

also läßt sich daraus γ in d und in β ausgedrückt finden, während $y^2 = \beta . x + \gamma . x^2$ die Gleichung für die Ellipse oder Hyperbel ist.

Anmerkung. Die Parabel ist schon durch den bloßen Scheitel-Abstand d des Brennpunkts völlig gegeben, weil man hat nach (§. 111.):

$$d = \pm \tfrac{1}{4}\beta \quad \text{also} \quad \beta = \pm 4d,$$

daher die Gleichung der Parabel dann:

$$y^2 = \pm 4dx.$$

Es gilt jedoch dies alles nur unter der Voraussetzung, daß der Winkel φ der Axen mit gegeben ist.

§. 121. Erklärung.

In der Ellipse und in der Hyperbel wird der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt die Excentricität genannt und gewöhnlich durch e bezeichnet *).

§. 122. Zusatz.

Wir werden von nun an die halbe große Axe der Ellipse, und die halbe reelle Axe der Hyperbel durch a, so wie durch b die halbe kleine Axe der Ellipse, oder die halbe imaginäre Axe der Hyperbel vorstellen (wo wir in dem letztern Fall b noch immer positiv denken). Dann ist die Hauptmittelpunktsgleichung

der Ellipse: 1) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

der Hyperbel: 2) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$;

und dann ergibt sich aus (§. 111.)

für die Ellipse: 3) $e = +\sqrt{a^2 - b^2}$

und für die Hyperbel: 4) $e = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

§. 123. Zusatz.

Man kann aber hieraus b^2 finden in a und in e ausgedrückt, nehmlich

für die Ellipse: 5) $b^2 = a^2 - e^2$

für die Hyperbel: 6) $b^2 = e^2 - a^2$.

---

*) Ist a die halbe große Axe der Ellipse, oder die halbe reelle Axe der Hyperbel, so nennt man auch oft nicht die obige Entfernung selbst, sondern den Quotienten, den man erhält, wenn man sie durch a dividirt, die Excentricität und bezeichnet solche durch e. Für den Fall daß $a = 1$ genommen wird, kommen dann beide Bedeutungen überein.

Hernach kann man diese Werthe von b^2 in die Gleichungen (1.) und (2.) selbst setzen und man erhält dann die Haupt-Mittelpunktsgleichung

$$\left.\begin{matrix}\text{für die Ellipse}\\ \text{und für die Hyperbel}\end{matrix}\right\} y^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

so daß diese Gleichung am geeignetsten ist, gemeinschaftliche Eigenschaften der Ellipse und der Hyperbel zu liefern.

§. 124. Erklärung.

Jede von dem Brennpunkt nach irgend einem Punkte der Curve (Ellipse, Parabel oder Hyperbel) gezogene Gerade, (z. B. FM (Fig. 44. 46. 48.)) wird der Radius-Vector genannt, so wie der Winkel (MFX) den letzterer mit der positiven Richtung des Haupt-Durchmessers macht, die Anomalie genannt werden mag. Ersterer soll immer durch r, letzterer dagegen durch v vorgestellt werden.

§. 125. Aufgabe.

Sowohl in der Parabel, als auch in der Ellipse und in der Hyperbel, eine Gleichung zwischen r und v zu finden, für jeden beliebigen Punkt der Curve.

Auflösung I. Es ist die Hauptscheitelgleichung der Parabel:

$$1)\quad y^2 = \beta x,$$

wo, wenn die (Figur 44.) zu Grunde gelegt wird, β negativ ist. Ferner hat man:

$$FP = \pm(-x + \tfrac{1}{4}\beta)\ ^*),\quad MP = y,\qquad \text{also}$$

$$FM = \sqrt{y^2 + (-x + \tfrac{1}{4}\beta)^2} = -x - \tfrac{1}{4}\beta,$$

d. h. $$2)\quad r = -x - \tfrac{1}{4}\beta.$$

Außerdem hat man noch, wenn $MFX = v$ ist,

---

*) Das (+) Zeichen gilt, wenn $v > 90°$, das (—) Zeichen dagegen, wenn $v < 90°$ ist, weil FP immer absolut (positiv) werden muß.

$$\frac{MP}{FM} = \sin v \quad \text{und} \quad \frac{FP}{FM} = \mp \cos v \text{ *)},$$

d. h. 3) $\frac{y}{r} = \sin v$ und 4) $\frac{\pm(-x+\frac{1}{4}\beta)}{r} = \pm \cos v$,

wo die obern (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich gelten.

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (2—4.) den Buchstaben x, so bleibt die gesuchte Gleichung zwischen r und v übrig.

Man erhält aber aus (2. und 4.) zunächst:

$$r = -\tfrac{1}{2}\beta - r \cdot \cos v,$$

d. h. 5) $r = \frac{-\frac{1}{2}\beta}{1+\cos v}$.

II. Die Mittelpunktsgleichung für die Ellipse und für die Hyperbel ist:

1) $y^2 = \frac{a^2-e^2}{a^2} \cdot (a^2-x^2)$.

Ist nun (Fig. 46. und 48.) $FM = r$, $MFX = v$, so hat man:

$$FM = \sqrt{FP^2 + PM^2},$$

oder, weil $FP = e+x$ und $PM^2 = \frac{a^2-e^2}{a^2} \cdot (a^2-x^2)$ ist,

2) $r = \pm\left(a + \frac{e}{a}x\right)$,

wo in der Ellipse allemal das (+) Zeichen in der Hyperbel dagegen das (+ oder —) Zeichen gilt, je nachdem x positiv oder negativ ist, weil r immer absolut werden muß;

3) $r \cdot \sin v = y$ und 4) $r \cdot \cos v = e+x$;

folglich, wenn man x eliminirt aus den Gleichungen (2 — 4.):

---

*) Nehmlich $+\cos v$ wenn $v < 90°$, dagegen $-\cos v$, wenn $v > 90°$ ist.

$$\pm r = a + \frac{e}{a}(r\cos v - e),$$

d. h. $$5)\quad r = \frac{a^2 - e^2}{\pm a - e.\cos v} = \frac{(a+e)(a-e)}{\pm a - e.\cos v},$$

wo in der Ellipse allemal das (+) Zeichen, in der Hyperbel dagegen das (+ oder —) Zeichen genommen werden muß (in den Fig. 46. 48.), je nachdem x positiv oder negativ, d. h. je nachdem der Punkt M rechts des Mittelpunktes oder links des Mittelpunktes liegt.

Es kann aber aus dieser Gleichung, wenn man (1. und 3.) zu Hilfe nehmen will, auch noch a eliminirt werden.

Anmerkung. Man nennt diese Gleichungen zwischen r und v, welche für jeden Punkt der Curven gelten, und durch welche also die Curve eben so gut gegeben ist und construirt gedacht werden kann *), die Gleichung der Curve zwischen den Polar-Coordinaten. Sie ist in vielen Fällen bequemer, als jede andere auf zwei geradlinige Axen bezogene Gleichung, schon deshalb, weil sie nach r nicht quadratisch ist.

---

*) Man nimmt nehmlich die Winkel v beliebig, trägt sie an F und FX an, berechnet aus der Polar-Gleichung:

$$r = \frac{-\frac{1}{2}\beta}{1+\cos v} \quad \text{oder} \quad r = \frac{(a+e)(a-e)}{\pm a - e.\cos v}$$

das zugehörige r, und trägt solches von F aus auf den zweiten Schenkel von v ab, so erhält man jedesmal einen Punkt M der Curve; also überhaupt beliebig viel Punkte der Curve.

Siebentes Kapitel.

Aufzählung und Zusammenstellung der bekanntern Eigenschaften der Parabel, Ellipse und Hyperbel. Asymptoten der Hyperbel. Vergleichung dieser 3 Linien mit einander.

Nachdem wir in den vorhergehenden Kapiteln den Grund zur analytischen Geometrie gelegt und die Art und Weise dargelegt haben, wie eine Gleichung zergliedert (analysirt) und wie denen, in ihr enthaltenen calculativen Resultaten, ihre geometrische Bedeutung nachgewiesen und in einer bestimmten Figur versinnlicht werden kann; nachdem wir namentlich auch die allgemeinsten und wichtigsten Eigenschaften der 3 Linien der 2ten Ordnung (der Parabel, Ellipse und Hyperbel) entwickelt haben, so können wir nun in das innere der einzelnen dieser Figuren eingehen und die speciellsten Eigenschaften derselben nachspüren.

Dem Geiste dieser Schrift zu Folge hat man aber nichts weiter zu thun, als aus der speciell gegebenen Gleichung einer dieser Curven, die Linien und die Winkel alle, welche noch einer nähern Vergleichung unterworfen werden sollen, nach den (§. §. 11—15.) und (§. §. 26. 27. 34.) in den Coefficienten der gegebenen Gleichung auszuwerthen, und diese Ausdrücke selbst nachgehends mit einander zu vergleichen.

Aus diesem Grunde mag dieses ganze Kapitel blos als eine Sammlung von Uebungs-Aufgaben betrachtet werden, theils (und

meist) solcher, welche in den vorhergehenden schon gelöst sind, theils auch solcher, deren Lösung hier noch nicht speciell ausgesprochen worden ist. Bei der Lösung wird der Anfänger allemal zuerst den rein analytischen, in dem Vorhergehenden und besonders in den (§.§. 11 — 15. und 26 — 34.) hinlänglich bezeichneten und gebahnten Weg betreten, weil nur solcher allgemein wahre, für jede specielle Figur unverändert geltende Resultate liefert. Nachher bleibt es noch immer unbenommeu, sich zu überzeugen, wie Euklidisch-geometrische Betrachtungen diese Resultate an einander reihen können, wie also durch letztere Betrachtungen aus einem Resultat mehre andere unmittelbar gefolgert werden können, wenn auch nur für eine specielle Figur, so daß man nicht überzeugt ist, ob solche auch für jede andere specielle Figur noch eben so oder mit welcher Abänderung dieselben jetzt noch statt finden müssen.

I.

Aufzählung und Zusammenstellung der bekanntern Eigenschaften der Parabel.

§. 126.

Die Parabel hat lauter mit einander parallele Durchmesser. Jeder derselben halbirt seine Sehnen unter einem bestimmten Winkel. Ein einziger der Durchmesser ist Haupt-Durchmesser d. h. halbirt seine Sehnen senkrecht; solcher theilt die Parabel in zwei congruente Theile. Zwei von diesem Haupt-Durchmesser gleichweit abstehende Durchmesser halbiren ihre Sehnen unter demselben Winkel, jedoch so, daß, obgleich die Durchmesser mit einander parallel sind, daß eine Sehnensystem mit dem andern Sehnensystem nicht parallel läuft.

§. 127.

Die allgemeine Gleichung der Parabel auf beliebige Axen bezogen erhält allemal die Form:

$$a.y^2+b.xy+c.x^2+d.y+e.x+f=0,$$

in welcher aber $b^2=4ac$ seyn muß. Nimmt man jedoch einen der Durchmesser zur Abscissen-Axe und eine mit den zugehörigen Sehnen parallele Linie zur Ordinaten-Axe, so wird die Gleichung der Curve jetzt die Form:

$$y^2=\alpha+\beta.x$$

annehmen, und die noch einfachere Form: $y^2=\beta.x$, wenn die Ordinaten-Axe zugleich durch den Punkt hindurchgeht, in welchem die Abscissen-Axe die Curve schneidet. Diese Gleichung heißt die Scheitelgleichung; und sie wird die Haupt-Scheitelgleichung, wenn die Abscissen-Axe der Haupt-Durchmesser, der Axenwinkel also ein rechter ist.

§. 128.

In der durch die Haupt-Scheitelgleichung $y^2=\beta.x$ gegebenen Parabel NAM (Fig. 44.), wenn F den Brennpunkt vorstellt, A den Hauptscheitel, AX den Haupt-Durchmesser, und M den Punkt, dessen Coordinaten-Werthe

$$AP=x \quad \text{und} \quad PM=y$$

sind, während TMU die Tangente in diesem Punkte, ist

1) der Scheitel-Abstand des Brennpunkts $AF=\pm\frac{1}{4}\beta$ d. h. dem vierten Theil des Parameters gleich;
2) die Brennpunkts-Ordinate $FG=\pm\frac{1}{2}\beta$ d. h. dem halben Parameter gleich;
3) die Subtangente $PT=\pm 2x=2AP$; $AT=\pm x$; *)
   $\triangle ATO \cong \triangle MOL$ und $\triangle TMP=\square APML$;
4) die Subnormale $PW=\pm\frac{1}{2}\beta$, d. h. dem halben Parameter gleich;

---

*) Nach der (Fig. 44.) ist β negativ, also $-\beta$ der (absolute) Parameter, und in den Ausdrücken für FG, AF, PT, AT etc. sind allemal die (—) Zeichen beizubehalten, damit sich für die Linien selbst absolute Zahlen ergeben. In einer andern Figur, in welcher die Schenkel sich rechts in's Unendliche erstreckan, gelten die + Zeichen.

5) $FM = \pm(\frac{1}{4}\beta + x)$ (§. 111. n. 6.);
6) $FW = \pm(\frac{1}{4}\beta + x)$; also auch
7) $FM = FW$, W. FMW = W. FWM = W. WMS, wenn MS mit AX parallel gezogen ist; auch W. TMF = = W. UMS. *)

§. 129.

Macht man $AD = AF = \pm\frac{1}{4}\beta$, und errichtet man DE senkrecht auf AX, so heißt diese Linie DE die Richtungslinie (Directrice) der Parabel, und jeder Punkt der Curve steht von ihr eben so weit, wie vom Brennpunkt ab; es ist nehmlich $ME = PD = \pm(\frac{1}{4}\beta + x) = MF$. Und weil W. EMB = W. UMS = W. FMB ist, so gibt die Richtungslinie ein bequemes Mittel ab, beliebig viel Punkte der Parabel und zugleich die Tangenten an selbige zu finden. Man nimmt z. B. H beliebig auf DE an, zieht FH, nachdem man DF = dem halben Parameter gemacht hat, halbirt FH in K, errichtet eine senkrechte Linie KJ auf FH, und zieht HJ parallel mit DF, bis sich letztere beide Linien in J schneiden; so ist J ein Punkt der Parabel, und KJ die zu diesem Punkt gehörige Tangente.

§. 130.

Die senkrechten Abstände des Brennpunktes von zweien Tangenten der Parabel verhalten sich allemal wie die Quadrat-Wurzeln aus den Abständen des Brennpunkts von den Berührungspunkten. — Denn es ist

$$FB = \tfrac{1}{2}FE = \tfrac{1}{2}\sqrt{FD^2 + MP^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}\beta^2 + \beta x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta}.\sqrt{FM},$$

und natürlich dann auch

$$FK = \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta}.\sqrt{FJ},$$

also $$FB : FK = \sqrt{FM} : \sqrt{FJ}.$$

---

*) Strahlen, welche in der Richtung SM, also parallel mit dem Haupt-Durchmesser einfallen, werden daher von der Parabel nach dem Brennpunkt F hingeworfen, und vereinigen sich alle daselbst. Daher der Name.

§. 131.

In der Parabel verhalten sich die Quadrate paralleler Sehnen, wie die Abstände ihrer Halbirungspunkte von dem Scheitel des zugehörigen Durchmessers. — Denn es ist auf diesen Durchmesser bezogen, wenn die Abstände durch X und X′, die zugehörigen halben Sehnen dagegen durch Y, Y′ vorgestellt werden, weil die erstern als die Abscissen, die andern aber als die Ordinaten angesehen werden müssen, wegen der Scheitelgleichung:

$$Y^2 = P.X \quad \text{und} \quad Y'^2 = P.X'.$$

§. 132.

Die MS ist ein Durchmesser der Parabel und halbirt alle mit MT parallele Sehnen, z. B. CV in p. Wird nun die Scheitelgleichung für diesen Durchmesser MS durch

$$Y^2 = \mathfrak{B}.X$$

vorgestellt, so findet sich allemal

$$\mathfrak{B} = \pm(\beta + 4x) = 4FM,$$

wo x den Abscissen-Werth AP des Scheitels M vorstellt.

Unter allen Parametern einer und derselben Parabel ist daher der zu dem Haupt-Durchmesser gehörige der kleinste.

Und die halbe Sehne qm, welche durch den Brennpunkt F hindurchgeht, ist $= \pm\frac{1}{2}\mathfrak{B}$, also wiederum der halbe (neue) Parameter, wie dies von FG in Bezug auf den alten Parameter gilt.

Ferner ist $\triangle CQR = \square QL$ *) und $\triangle CpZ = \square Tp$ **).

---

*) Denn es ist, wegen der ähnlichen Dreiecke
$\triangle MPT : \triangle CQR = MP^2 : CQ^2 = AP : AQ = \square AM : \square AZ$ (oder $\square LQ$).
Und dabei nach (§. 128. n. 3.) $\triangle MPT = \square AM$.

**) Es ist dies derselbe Satz, wie der nächst vorhergehende, nur auf den Durchmesser MS und die zu dem Punkt A der Curve gehörige Tangente AL bezogen, wo denn ML die Subtangente wird.

§. 133.

Ist (Fig. 43.) MX_1 ein beliebiger Durchmesser der Parabel, und sind CE, DH, M_1P_1 zugehörige halbe Sehnen, so wie M_1T_1 eine Tangente, so ist bekanntlich die Subtangente $P_1T_1 = 2MP_1$, also $MP_1 = MT_1$.

Dann ist aber auch noch, wenn man DCK zieht,

$$MK^2 = ME.MH.$$

Und daher auch, wenn $M'NS$, $M''NS'$ wiederum solche Sekanten sind, $MS^2 : MS'^2 = MH' : MH''$.

§. 134.

Unter allen über einer Sehne CV beschriebenen Dreiecken, deren Spitzen in dem abgeschnittenen Bogen der Parabel liegen, ist dasjenige CVM das größeste, welches den Scheitel M des, zu dieser Sehne gehörigen Durchmessers zur Spitze hat.

§. 135.

Sind (Fig. 45.) AP und NB zwei Durchmesser der Parabel, MP und MA zugehörige Sehnen, so ist allemal

$$\triangle MAP = 4 \triangle ANM,$$
$$\triangle ANM = \tfrac{1}{4} \triangle MAP\ ^*).$$

Dieses Satzes kann man sich bedienen, um zu beweisen, daß das Parabel-Segment

$$APMNA = \tfrac{2}{3} APMS,$$

d. h. $\frac{2}{3}$ ist, des Parallelogramms $APMS$. — Es wird nehmlich Segment $ANMP = \triangle AMP + \frac{1}{4} \triangle AMP + \frac{1}{16} \triangle AMP + + \frac{1}{64} \triangle AMP +$ etc. etc. in inf.

---

*) Es ist nehmlich, aus der Gleichung der Parabel (§. 131.):

$$AQ : AP = NQ^2 : MP^2 = 1 : 4,$$

in so ferne $NQ = DR = \frac{1}{2} MP$ ist;

also ist $AQ = \frac{1}{4} AP = \frac{1}{2} AR = QR = ND$,

und $\triangle NDA (= \triangle NDM) = \frac{1}{2} ADR = \frac{1}{8} AMP$;

demnach $AMN = \frac{1}{4} APM$.

$= \triangle AMP\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots \text{in inf.})$
$= \frac{4}{3} \triangle AMP$ *).

§. 136.

Aus $y^2 = \beta x$ oder $x = \frac{y^2}{\beta}$, folgt $\beta : y = y : x$;

und man kann daher die Parabel aus der Scheitelgleichung, die auf einen gegebenen Axen-Winkel φ sich bezieht, dadurch construiren, daß man auf der Ordinaten-Axe SA, $AL = \beta$ abträgt, LV mit der Abscissen-Axe AP parallel zieht, dann AC beliebig statt y nimmt, $LE = AC = y$ macht, zuletzt aber AE, und CG parallel mit LV zieht, wo denn CG das dazugehörige x, also G ein Punkt der Parabel seyn muß.

II.

Aufzählung und Zusammenstellung der bekannten Eigenschaften der Ellipse.

§. 137.

In der Ellipse schneiden sich alle Durchmesser in dem Mittelpunkt; jeder derselben halbirt seine zugehörigen Sehnen unter einem, von seiner Lage abhängigen bestimmten Winkel; jeder halbirt aber auch den Durchmesser der mit seinen Sehnen parallel läuft und welcher der ihm zugeordnete Durchmesser genannt wird. Von zwei einander zugeordneten Durchmessern halbirt ein jeder die Sehnen die mit dem andern parallel laufen, und geht durch den Berührungs-Punkt der mit dem andern parallelen Tangen-

---

*) Es ist nehmlich wiederum

$\triangle NPM = \frac{1}{4} NDM$ und $\triangle AqN = \frac{1}{4} ADN$,

also $\triangle NpM + \triangle AqN = \frac{1}{4} AMN = \frac{1}{16} AMP$;

u. s. w. f.; und dabei noch

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots \text{in inf.}$$

also $$\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \text{etc. etc. etc.}$$

ten. Jeder Durchmesser der Ellipse trifft die Curve wirklich, hat daher auch eine Länge und liefert also auch Halbmesser. Ein Paar der einander zugeordneten Durchmesser steht senkrecht auf einander und diese heißen deshalb Haupt-Durchmesser. Sind diese einander gleich, so ist die Ellipse eine Kreislinie. Im andern Fall heißt der größere „die große Axe", der kleinere dieser Haupt-Durchmesser dagegen „die kleine Axe" der Ellipse. Die Axen der Ellipse, d. h. die beiden Haupt-Durchmesser theilen sie in 4 congruente Theile.

§. 138.

Auch wenn die Haupt-Durchmesser einander ungleich sind, so läßt sich unter allen Paaren einander zugeordneter Durchmesser, doch allemal ein Paar gleicher herausfinden, dadurch daß man die Lage der ihnen zugehörigen Sehnen durch die Gleichung:

$$y = a_2 . x$$

ausdrückt, die Gleichungen und die Längen der beiden einander zugeordneten Durchmesser bestimmt, solche nachgehends einander gleich setzt und daraus den Werth von a_2 entwickelt, welches zugleich auch die Lage des einen der zugeordneten Durchmessers, der mit den, zu dem andern gehörigen Sehnen parallel läuft, unmittelbar bestimmt.

§. 139.

Sind f, g, und h, k zwei beliebige Paare zusammengehöriger Halbmesser, und a die halbe große, so wie b die halbe kleine Axe (wo also a und b abermals zusammengehörige Halbmesser sind), so hat man:

1) $f^2 + g^2 = h^2 + k^2 = a^2 + b^2$;
2) $f.g.\mathit{sin}\,(f, g) = h.k.\mathit{sin}\,(h, k) = ab$;
3) $f.a.\mathit{sin}\,(f, a) = g.b.\mathit{sin}\,(g, b)$;
4) $f.b.\mathit{sin}\,(f, b) = g.a.\mathit{sin}\,(g, a)$.

Und für den Fall, daß $f = g$, hätte man, wenn μ der Winkel ist, den diese gleiche einander zugeordnete Halbmesser mit einander bilden aus (1.) und (2.):

5) $2f^2 = 2g^2 = a^2 + b^2$; $f = g = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$,

6) $g^2 . \sin \mu = ab$; demnach

7) $\sin \mu = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$,

wodurch also der Winkel μ in a und b ausgedrückt, gefunden ist. Und aus (3. und 4.) findet sich noch für den Fall der Gleichheit $f = g$,

8) $\frac{\sin(f, a)}{\sin(g, a)} = \frac{\sin(g, b)}{\sin(f, b)}$,

oder $\sin(g, a) . \sin(g, b) = \sin(f, a) . \sin(f, b)$.

Und nimmt man an, daß f derjenige der gleichen zusammengehörigen Halbmesser ist, welcher zwischen a und b liegt, so hat man nach (Fig. 40.):

$(f, a) + (f, b) = 90°$ und $(g, a) - (g, b) = \pm 90°$,

also $\sin(f, b) = \cos(f, a)$ und $\sin(g, b) = \cos(g, a)$;

demnach geht die (7.) über in

$$\sin(g, a) . \cos(g, a) = \sin(f, a) . \cos(f, a),$$

oder $$\sin 2(g, a) = \sin 2(f, a),$$

d. h. $$(g, a) = (f, a);$$

und die beiden einander gleichen zusammengehörigen Durchmesser bilden also mit der großen Axe gleiche Winkel *).

Zieht man von den Endpunkten M und N zweier beliebigen zusammengehörigen Durchmesser mit einem beliebigen Durchmesser CE parallele Linien, bis solche den zu EC gehörigen Durchmesser CS treffen in O und in R, so ist allemal:

---

*) Und da in (7.) der Winkel μ schon gefunden worden, so hat man noch:

$$(g, a) = (f, a) = 90° - \tfrac{1}{2}\mu,$$

wodurch auf's neue die Lage der einander gleichen zusammengehörigen Durchmesser bestimmt ist.

9) $CO^2 + CR^2 = CS^2$ *).

Und zieht man an N eine Tangente, bis sie das andere Paar einander zugeordneter Durchmesser in T und t trifft, so ist noch:

10) $NT.Nt = CM^2$.

§. 140.

Legt man einer Ellipse beliebige Axen, die einen beliebigen Winkel φ mit einander bilden, zu Grunde, so ist ihre allgemeine Gleichung:

1) $a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + e.x + f = 0$,

so jedoch, daß $b^2 < 4ac$ seyn muß.

---

*) Nimmt man nehmlich CS zur Abscissen-Axe und CE zur Ordinaten-Axe, setzt $CS = h$, $CE = k$, so hat man die Gleichung der Ellipse:

$$1)\quad y^2 = \frac{k^2}{h^2}(h^2 - x^2).$$

Wird nun die Gleichung des beliebigen Durchmessers CN durch

$$2)\quad y_1 = a_2.x$$

vorgestellt, so ist die Gleichung des zugehörigen Durchmessers CM:

$$3)\quad y_2 = -\frac{k^2}{h^2 a_2}.x_2$$

Sucht man nun CO und CR als die Abscissen der Durchschnittspunkte der Geraden (2.) und (3.) mit der Curve (1.), so ergibt sich

$$4)\ CO = \frac{hk}{\sqrt{h^2.a_2^2 + k^2}} \quad \text{und} \quad 5)\ CR = \frac{h^2.a_2}{\sqrt{h^2.a_2^2 + k^2}}.$$

Desgleichen findet sich aus der Gleichung (1.)

$$subtg\ OT = \frac{h^2 - CO^2}{CO} = (\text{n. } 7.)\ \frac{CR^2}{CO},$$

also

$$CO.OT = CR^2.$$

Zieht man daher noch NT parallel mit CS, so hat man noch, wegen der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$CMR, NTO, NFT:

$$NT : TO = CM : CR,$$

$$Nt : NF = CM : CR,$$

also

$$NT.Nt : TO.NF = CM^2 : CR^2,$$

und daher, weil

$$TO.NF = TO.CO = CR^2$$

oben schon gefunden worden,

auch

$$NT.Nt = CM^2,$$

wodurch zugleich die (nro. 9.) außer Zweifel gesetzt ist.

Dagegen ist die Gleichung auf einen der Durchmesser bezogen, als Abscissen-Axe, und wenn die Ordinaten-Axe parallel mit den zugehörigen Sehnen läuft:

2) $y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$,

wo aber γ negativ seyn muß.

Und die Scheitel-Gleichung der Ellipse ist:

3) $y^2 = \beta . x + \gamma . x^2 = \frac{k^2}{h^2}(\pm 2hx - x^2)$,

wenn h und k die einander zugehörigen Halbmesser sind, von denen der erstere die Abscissen-Axe ist, der andere aber mit der Ordinaten-Axe parallel läuft. Dieses ist zu gleicher Zeit die Haupt-Scheitelgleichung, wenn die Axen senkrecht auf einander genommen sind.

Und jede Mittelpunkts-Gleichung hat die Form:

4) $y^2 = \alpha + \gamma . x^2 = \frac{k^2}{h^2}(h^2 - x^2)$,

wo γ negativ ist.

Und ist a die halbe große, b aber die halbe kleine Axe, so ist die Haupt-Scheitelgleichung:

5) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm 2ax - x^2)$,

wo das (+) Zeichen gilt, wenn der Scheitel zur Linken, das (—) Zeichen dagegen, wenn der Scheitel zur rechten zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird. Und eben so ist die Haupt-Mittelpunkts-Gleichung:

6) $y^2 = \frac{b^2}{a^2} . (a^2 - x^2)$;

und dieselben Gleichungen geben noch dieselbe Ellipse, wenn a und b bloß beliebige einander zugeordnete Halbmesser sind, wenn nur der Axenwinkel derjenige ist, unter welchem sich diese Halbmesser einander schneiden. (Vgl. 3. u. 4.).

§. 141.

Die Ellipse hat zwei Brennpunkte, in der großen Axe liegend, vom Mittelpunkt und daher auch von beiden Hauptscheiteln gleich weit entfernt. Unter Brennpunkten versteht man aber solche, deren Abstand von jedem Punkte (x, y) der Curve sich rational in x oder y ausdrücken läßt.

Ist nun (Fig. 48.) AB die große, DE die kleine Axe der Ellipse, C der Mittelpunkt, F und G die beiden Brennpunkte, $AC=a$, $CD=b$, $-CP=x$, $PM=y$, MT die Tangente an M, und geht man von der Mittelpunkts-Gleichung:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \quad \text{oder} \quad y^2=\frac{a^2-e^2}{a^2}.(a^2-x^2)$$

aus, wo C der Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ergeben sich sogleich folgende Resultate:

1) Die Excentricität ist:

$$CF=CG=e=+\sqrt{a^2-b^2};$$

der Scheitel-Abstand der Brennpunkte ist:

$$AF=a-e=a-\sqrt{a^2-b^2}=BG,$$

$$AG=a+e=a+\sqrt{a^2-b^2}=BF;$$

also auch

$$AF.BF=(a-e)(a+e)=a^2-e^2=b^2=CD^2,$$

d. h. $AF:CD=CD:BF.$

2) Der Parameter ist dasmal $\frac{2b^2}{a}$, *)

*) Man versteht nehmlich unter Parameter den jedesmaligen Coefficienten von x, in der Scheitelgleichung, absolut genommen. Ist β dieser Parameter, so ist dasmal

$$\beta=2\frac{b^2}{a}, \quad \text{also} \quad 2b^2=a\beta,$$

also ist die Scheitelgleichung selbst jetzt von der Form

$$y^2=\beta.x-\frac{\beta}{2a}.x^2.$$

und die zu F oder G gehörigen Ordinaten FH, GK finden sich $= \frac{b^2}{a}$, d. h. dem halben Parameter gleich.

3) Die Brennpunkts-Abstände FM und GM sind nach (§. 14.) und (§. 111. n. 6.):

$$FM = \pm\left(a + \frac{e}{a}x\right),$$

$$GM = \pm\left(a - \frac{e}{a}x\right),$$

in welchen Ausdrücken jedoch blos das (+) Zeichen beibehalten werden muß, weil hier (nach der dasmal gemachten Voraussetzung) $x < a$ ist, (das x absolut genommen), der eingeklammerte Ausdruck also jedesmal schon absolut seyn wird. — Daraus folgt aber sogleich noch:

4) $FM + GM = 2a$ *).

Ferner findet sich die Gleichung für die Tangente MT:

5) $y_1 - y = -\frac{b^2 . x}{a^2 . y} . (x_1 - x)$.

Demnach

6) $T_a = x + \frac{a^2 . y^2}{b^2 . x} = \frac{a^2}{x}$ **)

7) $PT = \pm(P_a - T_a) = \pm\frac{a^2 . y^2}{b^2 . x}$,

---

*) Diese Eigenschaft der Ellipse gibt ein Mittel sie mechanisch zu construiren. Man befestigt einen Faden, der die Länge 2a hat, mit seinen beiden Endpunkten in F und in G, spannt dann mit einem Stifte den Faden etwa in M an, und beschreibt nun mit dieser Spitze, den Faden immer so ausgespannt erhaltend, die Curve.

**) Weil $T_a = -CT$ und $x = -CP$ und $a = CA$ ist, so ist also $CT = \frac{CA^2}{CP}$ oder $CP : CA = CA : CT$, wie solches früher schon gefunden worden.

d. h. $subtg = \pm \frac{a^2 . y^2}{b^2 . x}$, oder $subtg = \pm \frac{2ax - x^2}{a - x}$,

wo das + Zeichen gilt, wenn x positiv, das — Zeichen dagegen, wenn x negativ ist (wie hier für $x = -CP$), weil dann in jedem Falle PT absolut wird. Daraus

8) *subnorm* $PW = \pm \frac{b^2 . x}{a^2}$.

Auch findet sich noch:

9) $FT = \pm (F_a - T_a) = \mp \left(e + \frac{a^2}{x} \right) = \mp \left(\frac{a^2}{x} + e \right)$

10) $GT = \pm (G_a - T_a) = \pm \left(e - \frac{a^2}{x} \right) = \mp \left(\frac{a^2}{x} - e \right)$

wo die beiden obern (+ oder —) Zeichen gelten, wenn x negativ, die beiden untern dagegen, wenn x positv ist.

Daraus weiter

11) $\frac{FM}{FT} = \frac{GM}{GT} = \mp \frac{x}{a} = \frac{CP}{CA}$,

welche Gleichung 3 Proportionen enthält.

Zieht man daher FQ mit GM und GS mit FM parallel, so wird

12) $FQ = FM$ und $GS = GM$,

woraus wiederum hervorgeht:

13) $\mathfrak{W}. FMT = \mathfrak{W}. GMS$ *)

Und es folgt noch immer weiter, daß, wenn man FL oder GN senkrecht auf die Tangente TMS zieht, dann

14) $CL = CN = CA = CB = a$ seyn werde; weil CL pa=

*) Die Strahlen, welche von G aus in die Curve einfallen, werden daher alle in den Punkt F zurückgeworfen, um sich daselbst zu vereinigen; dasselbe auch umgekehrt. Daher der Name dieser Punkte.

rallel mit GM und CN parallel mit FM seyn muß; in so ferne $CF = CG$ und $QL = LM$ ist.

§. 142.

Zieht man CV senkrecht auf die Tangente, und FZ parallel mit ihr, so ist allemal

$$CV^2 = CZ^2 + b^2,$$

so daß CZ, CD und CN ein rechtwinkliches Dreieck bilden können, während CV die Hypothenuse ist *).

§. 143.

Construirt man über einen Haupt-Durchmesser oder über beide, z. B. über die große Axe AB (Fig. 47.) und auch über die kleine Axe CD Kreislinien, so daß also die erstere a, die andere dagegen b zum Radius hat, so ist bekanntlich für jeden Punkt m, wenn mP durch y_1 und $-CP$ durch x vorgestellt wird, so daß $AP = a + x$ und $BP = a - x$ ist,

$$AP : Pm = Pm : PB,$$

d. h.
$$a + x : y_1 = y_1 : a - x,$$

also
$$y_1^2 = a^2 - x^2.$$

Für den Punkt M der Ellipse ist aber

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} . (a^2 - x^2);$$

also hat man:

---

*) Es ist nehmlich $CF = CG$, also $LV = VN$ und $CV + CZ = GN$, $CV - CZ = FL$; demnach $CV^2 - CZ^2 = FL . GN$.

Ferner $FL : FT = GN : GT = MP : MT$;

also auch $FL . GN : FT . GT = MP^2 : MT^2$.

Aber $FT . GT = \frac{a^4}{x^2} - a^2 + b^2$, $MP^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2} . (a^2 - x^2)$,

$$MT^2 = MP^2 + PT^2 = y^2 + \frac{a^4 . y^4}{b^4 . x^2} = \frac{b^4 . x^2 + a^4 . y^2}{b^4 . x^2} . y^2 =$$

$$= \frac{a^4 - a^2 . x^2 + b^2 . x^2}{b^2 . x^2} . y^2;$$

also $FL . GN = b^2 = CV^2 - CZ^2 = CD^2$.

1) $y = \frac{b}{a} . y_1$, d. h. $MP = \frac{b}{a} . mP$.

Und weil dies für alle neben einander auf AB liegende Ordinaten gilt, so kann man dieselbe Gleichung auf den Inhalt ausdehnen, so daß man hat:

2) $AMPA = \frac{b}{a} . AmPA$,

und

3) $ACDA = \frac{b}{a} . ACdA$ und $ADBA = \frac{b}{a} . AdBA$.

Weil aber $ACdA = \frac{1}{4} a^2 \pi$ (der ganze Kreis-Inhalt ist $= a^2 . \pi$), so hat man:

4) $ACDA = \frac{1}{4} ab . \pi$,

und

5) der Inhalt der ganzen Ellipse $= ab . \pi$.

Aehnliches und zuletzt dasselbe wird man erhalten, wenn man den über der kleinern Axe beschriebenen Kreis nimmt, und in der Gleichung für die Ellipse die Coordinaten-Axen mit einander vertauscht.

§. 144.

Die einander gleichen zusammengehörigen Durchmesser, welche (§. §. 138. 139.) betrachtet worden sind, haben gegen die große Axe eine solche Lage, daß, wenn CM der eine derselben ist, dann Cm den rechten Winkel ACD gerade halbirt. — Denn es ist

$$tg . MCP : tg . mCP = PM : Pm = b : a;$$

und gefunden wird

$$tg . MCP = \frac{b}{a} \text{ *)};$$

also ist $tg . mCP = 1$; und $MCP = 45°$.

---

*) In (§. 139.) wurde gefunden

$$\text{W}. MCP = 90° - \tfrac{1}{2}\mu \quad \text{und} \quad \sin \mu = \frac{2ab}{a^2 + b^2};$$

III.

Aufzählung und Zusammenstellung der bekanntern Eigenschaften der Hyperbel.

§. 145.

Was in (§. 137.) für die Ellipse gesagt ist, gilt auch für die Hyperbel; nur mit dem Unterschiede, daß in der Hyperbel nur immer einer der einander zugeordneten Durchmesser die Curve wirklich trifft, also einen Halbmesser liefert. Der Haupt-Durchmesser, welcher die Curve wirklich trifft, heißt auch die reelle Axe der Hyperbel, der andere die imaginäre Axe.

Was dagegen in (§. §. 138 und 139.) von der Ellipse gesagt ist, das kann für die Hyperbel nicht gelten.

§. 146.

Die Gleichungen der Hyperbel sind dieselben, wie sie (§. 140.) für die Ellipse aufgestellt worden sind, nur daß in (1.) das Kennzeichen der Hyperbel durch die Gleichung: $b^2 - 4ac$ oder $b^2 - 4ac > 0$ ausgesprochen ist, während in (2, 3 u. 4.) dagegen, γ nicht negativ, sondern positiv genommen, und daher in (3. und 4.) durchaus $k\sqrt{-1}$ statt k und in (5. und 6.) durchaus $b\sqrt{-1}$ statt b gesetzt werden muß, so daß diese letztern Gleichungen sich umändern und

für die Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm 2ax - x^2) \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

dagegen für die Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 \mp 2ax) \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

---

also $tg\,MCP = cotg\,\frac{1}{2}\mu = \frac{cos\,\frac{1}{2}\mu}{sin\,\frac{1}{2}\mu} = \sqrt{\frac{1+cos\,\mu}{1-cos\,\mu}} = \frac{1+cos\,\mu}{sin\,\mu}$;

und dabei $cos\,\mu = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$; also $tg\,MCP = \frac{b}{a}$.

seyn werden. Dabei ist 2a in der Hyperbel wie in der Ellipse die Länge des Haupt-Durchmessers; dagegen ist in der Ellipse b die Hälfte der Länge des andern zugehörigen Haupt-Durchmessers, während in der Hyperbel ein solcher gar nicht existirt, b demnach keine solche Bedeutung haben kann, nnd in der Regel nur eingeführt wird, damit die für die Ellipse aus ihrer Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\pm 2ax - x^2) \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

abgeleiteten Resultate zugleich Resultate seyn mögen für die Hyperbel, indem man nur in ihnen $b\sqrt{-1}$ statt b oder $-b^2$ statt b^2 schreibt; in so fern dann die eben gedachten Gleichungen in diejenigen der Hyperbel übergehen.

§. 147.

Ist nun (Fig. 46.) eine Hyperbel durch die Haupt-Mittelpunktsgleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

wo e die Excentricität und $= \sqrt{a^2 + b^2}$ ist, und wo also $\frac{2b^2}{a}$ der Parameter ist, gegeben, so daß der Mittelpunkt C der Anfangspunkt der Abscissen $AB = 2a$, und $AC = BC = a$ ist; sind ferner F und G die beiden Brennpunkte, M ein Punkt der Curve, dessen Coordinaten-Werthe $CP = x$, $PM = y$ seyn sollen, MT die Tangente, PT die Subtangente, PW die Subnormale, so findet sich:

1) $CF = CG = \sqrt{a^2 + b^2} = e$, $AF = e - a$ und
$AG = e + a$.

2) die zu den Brennpunkten F und G gehörige Ordinate FH und GK findet sich $= \frac{b^2}{a}$; also abermals gleich dem halben Parameter. Ganz wie dasselbe für die Ellipse nnd auch für die

Parabel gefunden worden ist (weshalb man auch zuweilen diese Eigenschaft als Definition der Brennpunkte benützt hat.)

Ferner findet sich:

$$3)\ FM = \pm\left(\frac{e}{a}x - a\right),$$

$$GM = \pm\left(\frac{e}{a}x + a\right),$$

wo die beiden obern (+ oder —) Zeichen gelten, wenn x positiv ist, die beiden untern dagegen wenn x negativ seyn sollte.

Also ist

$$4)\ \mp(FM - GM) = 2a,$$

wo das (—) Zeichen gilt, wenn x positiv, das (+) Zeichen dagegen, wenn x negativ ist.

Die Gleichung für die Tangente MT ist:

$$5)\ y_1 - y = \frac{b^2 . x}{a . y}(x_1 - x),$$

Demnach

$$6)\ T_a{}^*) = x - \frac{a^2 y^2}{b^2 . x} = \frac{a^2}{x},$$

so daß also T allemal rechts von C liegt, wenn der Punkt M rechts liegt, d. h. wenn x positiv ist, dagegen allemal links von C liegen muß, wenn x negativ ist, d. h. wenn der Punkt M in dem linken Zweige liegt. Auch nähert sich der Punkt T dem C desto mehr, je größer x wird, absolut genommen. Ferner ist noch

$$7)\ subtg = PT = \pm\frac{x^2 - a^2}{x},$$

und

$$8)\ subnorm = PW = \pm\frac{b^2 . x}{a^2},$$

---

*) Man muß hier nicht übersehen, daß T_a den Abscissen-Werth des Punktes T vorstellt, aus dem Mittelpunkt genommen.

wo jedesmal die (+) Zeichen gelten, wenn x positiv, die (—) Zeichen dagegen, wenn x negativ ist.

Auch findet sich weiter

$$9)\ FT = \pm(F_a - T_a) = \pm\left(e - \frac{a^2}{x}\right)$$

$$10)\ GT = \pm(G_a - T_a) = \pm\left(e + \frac{a^2}{x}\right),$$

wo jedoch durchaus die (+) Zeichen allein genommen werden dürfen, weil $\frac{a^2}{x}$ absolut genommen immer kleiner als a also kleiner als e ist. — Demnach noch

$$11)\ \frac{FM}{FT} = \pm\frac{x}{a} = \frac{GM}{GT} = \frac{CP}{CA}.$$

Und daraus wiederum:

12) W. FMT = W. GMT *).

Von den Asymptoten der Hyperbeln.

§. 148.

Man kann der Mittelpunkts-Gleichung für die Hyperbel, weil

$$\sqrt{x^2 - a^2} = (x - a^2)^{\frac{1}{2}} = x - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{x} - \tfrac{1}{8}\frac{a^4}{x^3} - \tfrac{1}{16}\frac{a^6}{x^5} \text{ etc. etc.}$$

ist, auch die Form geben:

$$y = \pm\frac{b}{a}\left(x - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{x} - \tfrac{1}{8}\frac{a^4}{x^3} - \text{ etc. etc.}\right)$$

oder 1) $y = \pm\left(\frac{b}{a}x - \tfrac{1}{2}\frac{ab}{x} - \tfrac{1}{8}\frac{a^3 b}{x^3} - \text{ etc. etc.}\right)$.

Nimmt man nun

*) Jeder Strahl, welcher aus der Verlängerung von FM in M einfiele, würde demnach nach G zurückgeworfen, so daß alle in der Richtung, als wenn sie nach F wollten, einfallenden Strahlen von der Hyperbel in G vereinigt werden.

$$2)\quad y_1 = \pm \frac{b}{a} x,$$

welches die Gleichung ist für eine gerade Linie, so kommt diese gerade Linie der Curve desto näher, je größer das x genommen ist, weil der Unterschied:

$$y - y_1 = \pm\left(-\tfrac{1}{2}\frac{ab}{x} - \tfrac{1}{8}\frac{a^3}{x^3} - \text{ etc. etc.}\right)$$

der Null desto näher rückt, je größer x genommen wird, mag übrigens x positiv oder negativ seyn.

Es stellt also die Gleichung (2.) zwei gerade Linien vor, welche, weil für $x = 0$, auch $y_1 = 0$ wird, durch den Mittelpunkt C der Hyperbel hindurchgehen, und welche sich den Schenkeln der Hyperbel auf beiden Seiten ins Unendliche nähern, so daß der Abstand dieser Linien von diesen Schenkeln als ein den Moment des Verschwindens erreichender gedacht werden kann. Diese beiden durch die Gleichung (2.) gegebenen geraden Linien nennt man die Asymptoten der Hyperbel; und die Schenkel der Hyperbeln nähern sich also ihren Asymptoten ohne Ende, kommen ihnen unendlich nahe, ohne doch je mit ihnen zusammenfallen zu können. *)

---

*) Wir sind hier von einer beliebigen Mittelpunkts-Gleichung ausgegangen; denn alles bleibt unverändert gültig, wenn

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

die Gleichung ist für die Hyperbel, auf zwei beliebige zusammengehörige Durchmesser als Coordinaten-Axen bezogen. Aber eben so gut konnte man die Asymptoten finden, indem man von irgend einer der Scheitelgleichungen oder von irgend einer Gleichung von der Form:

$$y^2 = \alpha + \beta . x + \gamma . x^2$$

endlich auch, wenn man von der ganz allgemeinen Gleichung:

$$1)\quad a . y^2 + b . xy + c . x^2 + d . y + e . x + f = 0,$$

die sich auf ganz beliebige Axen bezieht, ausgegangen wäre. — In diesem letztern Fall z. B. wird

$$2)\quad y = \frac{-(bx + d) \pm \sqrt{p . x^2 + 2q . x + r}}{2a}.$$

§. 149.

Da $y=\pm\frac{b}{a}x$ die Gleichung ist für die Asymptoten, so gehört zu $x=\pm a$, auch $y=\pm b$, d. h. in dem Scheitel A oder B ist die Ordinate BD oder Bd oder AE oder Ae der Zahl b gleich.

Ferner ist, weil die beiden zu einerlei x gehörigen Ordinaten der Asymptoten einander gleich sind,

$$Mm=Nn \quad \text{und} \quad Mn=mN,$$

welches alles gilt, es mögen die Haupt-Durchmesser, oder irgend zwei andere einander zugeordnete Durchmemesser zu Grunde gelegt seyn, so daß also z. B. auch für eine beliebig gezogene Gerade $m'n'$, noch

$$M'm'=N'n' \quad \text{und} \quad M'n'=m'N';$$

und zugleich, wenn VMTU eine Tangente ist, die Curve also nur in einem einzigen Punkte M trifft, auch

$$MV=MU$$

Und entwickelt man die Wurzel

$$\sqrt{p.x^2+2qx+r} \quad \text{oder} \quad (p.x^2+2q.x+r)^{\frac{r}{2}}$$

oder

$$x\left(p+2\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}\right)^{\frac{r}{2}}$$

nach negativen Potenzen von x, mittelst des binomischen Lehrsatzes, so wird aus (2.):

$$3)\ y=\frac{(-b\pm\sqrt{p})}{2a}x+\frac{-d+\frac{2q}{\pm\sqrt{p}}}{2a}+\frac{\mathfrak{C}}{x}+\frac{\mathfrak{D}}{x^2}+\ldots.$$

wo der Kürze wegen die Coefficienten der folgenden Glieder blos durch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. etc. bezeichnet sind.

Nimmt man nun

$$4)\ y_1=\frac{-b\pm\sqrt{p}}{2a}.x+\frac{-d+\frac{2q}{\pm\sqrt{p}}}{2a},$$

so ist dies die Gleichung für die Asymptoten, auf dieselben Axen bezogen.

Zugleich ersieht man, warum nur die Hyperbel (nicht aber die Parabel und nicht die Ellipse) Asymptoten hat. Denn in der Ellipse ist p, d. h. b^2-4ac negativ, also $\sqrt{p}$ imaginär; und in der Parabel ist $\sqrt{p}=0$.

seyn muß, also, daß der Berührungspunkt das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente halbiret.

Und weil alles dieses noch immer gelten würde, wenn z. B. der mit den beliebigen Geraden N′M″ parallele Durchmesser zur Ordinaten-Axe, sein zugehöriger dagegen zur Abscissen-Axe genommen würde, in welchem Falle, unter der Voraussetzung, daß 2a die Länge des erstern wäre, in der Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

blos die Coordinaten-Axen vertauscht werden dürften, so daß y die Abscissen-Werthe und x die Ordinaten-Werthe vorstellte, und die Gleichung der Curve selbst auf die Form:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 + a^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2),$$

also die Gleichung für die Asymptoten jetzt

$$x = \pm \frac{a}{b} y$$

werden würde, so folgt noch:

$$N'\nu = \mu M'' \quad \text{und} \quad N'\mu = M''\nu,$$

wie auch die Gerade N′M″ in der Hyperbel gezogen werden mag.

§. 150.

Nimmt man an, daß (Fig. 46.) AB die reelle Axe (Haupt-Durchmesser) $= 2a$ ist, also

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

die Haupt-Mittelpunkts-Gleichung, und

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

die Gleichungen für die Asymptoten DCe und dCE auf dieselben rechtwinkliche Axen bezogen sind, so hat man:

$$BD=b; \qquad tg\,DCB=\frac{b}{a};$$

$$sin\,DCB=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad cos\,DCB=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$CD=CG=Cd=CE=Ce=CF=e=\sqrt{a^2+b^2};$$

$$sin\,DCd=\frac{2ab}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad cos\,DCd=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Und zieht man LM parallel mit der Asymptote Cd, so ist, wegen $Cd=CD$, auch $LM=Lm$, und

$$Mm=2LM.\,sin\,DCB=2LM.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

also
$$LM=\frac{Mm.\sqrt{a^2+b^2}}{2b}.$$

Dabei aber $Mm=Pm-PM=y_1-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$,

also
$$LM=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}.(x-\sqrt{x^2-a^2})$$

und
$$Cm=\frac{PM}{sin\,DCB}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x;$$

also
$$CL=Cm-LM=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}(x+\sqrt{x^2-a^2});$$

mithin
$$CL.LM=\frac{a^2+b^2}{4a^2}.a^2=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Nimmt man daher die beiden Asymptoten als Coordinaten-Axen, sezt für einen beliebigen Punkt M seine Abscisse $CL=t$ und seine Ordinate $LM=u$, so hat man die Gleichung der Hyperbel:

$$tu=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2);$$

und dabei nennt man $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ die **Potenz der Hyperbel.**

Dasselbe findet sich jedoch besser, wenn man die Auflösung des (§. 63.) in Anwendung bringt. *)

Anmerkung 1. Die Potenz der Hyperbel läßt sich auch durch $BO^2 = CO^2 = DO^2$ vorstellen, wenn BO mit Cd parallel gezogen wird.

Anmerkung 2. Da

$$Mm = \frac{b}{a}.(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

also

$$Mn = \frac{b}{a}.(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

gefunden wird, so hat man noch:

$$Mm.Mn = \frac{b^2}{a^2}a^2 = b^2 = BD^2.$$

Und dies gilt noch, auch wenn beliebige zusammengehörige Durchmesser zu Coordinaten-Axen genommen sind; so daß also für jedes System mit einander paralleler Linien, die Produkte z. B. $M'm.M'n'$ einen und denselben Werth behalten und dem Quadrat der mit denselben Linien parallelen Tangente, vom Berührungspunkt bis zur Asymptote genommen, gleich seyn werden.

---

*) Im (§. 71. n. 4.) sind für jede durch die allgemeine Gleichung:

$$a.y^2 + b.xy + c.x^2 + d.y + ex + f = 0$$

also auch für die durch die jetzige Gleichung:

$$a^2.y^2 - b^2.x^2 + a^2b^2 = 0$$

gegebene Hyperbel, neue Axen gefunden, so daß die Gleichung für dieselbe Hyperbel die Form: $tu = k$ annimmt. Weil nun in dieser Gleichung, je kleiner t wird, desto größer u sich ergibt, und auch umgekehrt, so haben dasmal diese Axen selbst die Eigenschaften der Asymptoten, so daß also dieses ein neuer Weg ist, die Gleichung der Asymptoten zu finden. Und führt man die Rechnung gehörig durch, so findet sich noch $k = \frac{a^2 + b^2}{4}$, so daß also nach jener (n. 4. §. 71.) die Gleichung für die Hyperbel auf ihre Asymtoten bezogen, sich abermals ergibt.

§. 151.

Ist (Fig. 49.) noch AB die reelle Haupt-Axe $=2a$, und die Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

auf AB als Abscissen-Axe und den zugehörigen, auf AB senkrecht stehenden Haupt-Durchmesser, als Ordinaten-Axe bezogen,

und $$y = \pm\frac{b}{a}x$$

die Gleichung der Asymptoten CU, CZ, so hat man gefunden, wenn UM, VN mit CZ parallel sind:

$$CU.UM = CV.VN = \frac{a^2+b^2}{4},$$

Weil aber UZ in dem Berührungspunkt N halbirt ist, so ist auch $CV = \frac{1}{2}CU$ und $VN = \frac{1}{2}CZ$, also

$$CU.CZ = a^2 + b^2 = CD^2 = CD.Cd;$$

vermöge welcher Eigenschaft sehr leicht Tangenten an die Hyperbel gezogen werden können.

§. 152.

Nimmt man $b = a$, so daß also die Gleichung der Hyperbel bloß wird:

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

so ist die Gleichung ihrer Asymptoten jetzt:

$$y = \pm x$$

und die Asymptoten stehen nun auf einander senkrecht, und die Gleichung derselben Hyperbel auf die Asymptoten als Axen bezogen, bezieht sich nun auf rechtwinkliche Axen und ist:

$$tu = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Anmerkung. Diese Hyperbel, in welcher $b = a$ ist, nennt man aber die gleichseitige Hyperbel. — Da die Gleichung: 1) $y^2 = x^2 - a^2$

der gleichseitigen Hyperbel aus der Gleichung:

$$2)\ y^2 = a^2 - x^2,$$

welches die Gleichung ist für eine Kreislinie, dadurch hervorgeht, daß man in letzterer $y\sqrt{-1}$ statt y setzt, so werden alle aus der letztern Gleichung (für den Kreis) abgeleiteten Resultate des Kalkuls zu gleicher Zeit Resultate seyn aus der erstern Gleichung (für die gleichseitige Hyperbel) abgeleitet, wenn man nur in ihnen auch durchaus $y\sqrt{-1}$ statt y setzt. — Oder weil die erstere Gleichung (1) aus der letztern (2.) auch dadurch hervorgeht, das man in letzterer durchaus $a\sqrt{-1}$ und $x\sqrt{-1}$ zugleich beziehlich statt a und x setzt, so sind die analytischen Resultate aus letzterer zugleich auch Resultate aus ersterer, sobald man in ihnen ebenfalls $a\sqrt{-1}$ und $x\sqrt{-1}$ beziehlich statt a und x setzt.

Aus diesem Grunde wird die gleichseitige Hyperbel Eigenschaften zeigen, welche wir an dem Kreise schon kennen, oder welche doch mit Eigenschaften des Kreises die nächste Verwandschaft haben.

IV.

Vergleichung der Hyperbel und der Ellipse mit der Parabel.

§. 153.

Betrachten wir zuletzt noch einmal die Scheitelgleichungen der Ellipse und der Hyperbel welche zusammengefaßt sind in

$$1)\ y^2 = \beta.x + \gamma.x^2$$

oder in $$2)\ y^2 = \frac{2b^2}{a}.x \pm \frac{b^2}{a^2}.x^2 = \beta.x \pm \frac{\beta}{2a}x^2,$$

wo a die halbe große oder reelle Haupt-Axe ist. Es erhellet aus der Form dieser Gleichung, daß je kleiner x und je größer a ist, desto kleiner wird $\pm\frac{\beta}{2a}x^2$ gegen $\beta.x$ selbst werden,

so daß wenn man die Gleichung der Parabel:

$$3)\quad y_1^2 = \beta . x$$

noch dazu nimmt, die Ordinate y der Ellipse oder Hyperbel (2.) desto weniger von der zu derselben Abscisse x gehörigen Ordinate y_1 der Parabel (3.) verschieden seyn wird, je größer a und je kleiner x ist.

Unter der Voraussetzung also, daß a sehr groß ist, kann man den Theil der Ellipse oder Hyperbel, welcher nahe am Scheitel liegt und für welchen also x gehörig klein ist, als eine durch die Gleichung: $y^2 = \beta x$ gegebene Parabel ansehen und sich dadurch die Rechnungen erleichtern.

Note. Dies ist der Grund, warum man in der Astronomie die elliptischen Bahnen der Kometen zunächst als Parabeln sich denkt, einmal weil diese Bahnen sehr gedrückt sind, in ihnen also a sehr groß ist, und dann auch weil man bei jenen Untersuchungen sich immer sehr nahe am Scheitel befindet.

Schluß-Anmerkung.

Weil aber diese Linien der zweiten Ordnung, d. h. diese Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln auch allemal sich ergeben, wenn man einen (senkrechten oder schiefen) Kegel durch Ebenen beliebig schneiden läßt, als Durchschnitts-Figuren der Ebenen mit dem Kegelmantel, und weil umgekehrt, alle diese Durchschnitts-Figuren auch nie andere als die so eben betrachteten Linien der zweiten Ordnung sind, so pflegt man diese Curven auch Kegelschnitte zu nennen.

Umgekehrt kann man daher auch diese Curven aus dem Kegel definiren, und dann ihre Eigenschaften aus denen des Kegels und der ihn schneidenden Ebenen ableiten, bei welcher Methode jedoch die Theorie dieser Curven als eine zu sehr vereinzelt stehende erscheint, und nur gezwungen mit der übrigen analytischen Geometrie in Verbindung gebracht werden kann.

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.

In der Buchhandlung von T. H. Riemann in Berlin sind in diesem und in dem vergangenen Jahre von dem Verfasser dieses Buches,

Professor Dr. Martin Ohm,

erschienen:

Die Lehre
vom
Größten und Kleinsten.

Mit einer Einleitung und einem Anhange, von denen die erstere Hülfssätze aus der Differential- und Integral-Rechnung, der letztere dagegen eine etwas allgemeinere Variationsrechnung enthält.

Zu seinen Vorlesungen und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet. $21\frac{1}{2}$ Bogen, gr. 8. $1\frac{3}{4}$ Rthlr.

Diese Schrift ist die erste, welche die gesammte Lehre vom Größten und Kleinsten in ihrem ganzen Umfange behandelt. Der Anfänger findet in ihr die Elemente ausführlich, umfassend, gründlich und faßlich vorgetragen und der geübtere Analyst wird die eben so elementare und erfolgreiche Behandlung der isoperimetrischen Aufgaben mit Vergnügen lesen. Wir glauben diese Erscheinung eine der interessantesten und wichtigsten in der mathematischen Literatur nennen zu dürfen.

Die
reine Elementar-Mathematik,
1ster Band. 30 Bogen, gr. 8. $2\frac{1}{4}$ Rthlr.

Dieser 1ste Theil führt auch den besonderen Titel:

Die Arithmetik
bis
zu den höhern Gleichungen
weniger
abstrakt, sondern mehr anschaulich
und
leichtfaßlich aber möglichst gründlich und wissenschaftlich,
zunächst
für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin
dann auch
zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet
und mit sehr vielen Uebungs-Beispielen versehen.

Die so seltene Kunst, die Mathematik gründlich und doch so anziehend vorzutragen, daß der Anfänger sich immer mehr gereizt sieht, selbstthätig weiter zu gehen, zeigt sich in diesem Lehrbuche auf einer vorzüglichen Höhe und man sieht sich zum Studium der höhern Analysis auf eine Art vorbereitet, daß man dort unmöglich noch Schwierigkeiten finden kann. Als Leitfaden an gelehrten und höhern technischen Schulen, wird daher dieses Werk besondern Erfolg erzielen. Für geübtere Mathematiker gewinnt aber dasselbe noch dadurch an Interesse, daß es dem Verfasser gelungen ist, in fortlaufenden Noten, eben so anschaulich als geistreich, alle verschiedene Ansichten mit einander auszusöhnen und ihre wesentliche Identität nachzuweisen.

Der Selbstlernende findet endlich in den vielen Uebungs-Beispielen noch ein Mittel mehr, mündlichen Unterricht entbehren zu können.

Die
reine Elementar-Mathematik,
2ter Band. 24 Bogen, gr. 8. mit 3 Figurentafeln. 2 Rthlr.
Auch unter dem Titel:
Die allgemeine Größenlehre
und
die ebene Raumgrößenlehre
mit Inbegriff der analytischen und der ebenen Trigonometrie,
zunächst für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet und mit vielen Uebungsbeispielen versehen.

Die
reine Elementar-Mathematik,
3ter oder letzter Band. 22 Bogen und 5 Figurentafeln, gr. 8. 2 Rthlr.
Auch unter dem Titel:
Die
körperliche Raum-Größen-Lehre
mit Inbegriff der sphärischen Trigonometrie, der beschreibenden Geometrie, der Projektion der Schatten und der Perspektive; zunächst für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet und mit Uebungsbeispielen versehen.

Dieser dritte Band steht seinen beiden Vorgängern um nichts nach, gewinnt aber durch die Vollständigkeit und Deutlichkeit, mit welcher auch die beschreibende Geometrie, die Projektion der Schatten und die Perspektive behandelt sich finden, noch für die Techniker ein besonderes Interesse. Der (größere) theoretische Theil dieses Bandes scheint übrigens für den geometrischen Unterricht auf den obersten Klassen eines Gymnasiums vorzüglich geeignet zu seyn, weshalb wir, darauf besonders aufmerksam zu machen, nicht unterlassen dürfen.

Von demselben Verfasser sind früher erschienen und in oben genannter Buchhandlung in Commission zu haben:

Elementar-Geometrie
und
Trigonometrie
für Deutschlands Schulen und Universitäten.
Berlin 1819. 8 Bogen, 8. mit einer Kupfertafel. ½ Rthlr.

Kurzes
gründliches und leichtfaßliches
Rechenbuch
zum Unterricht
auf
Gymnasien und Bürgerschulen.
Berlin 1818. 15 Bogen, 8. ¾ Rthlr.

1.

2.

3.

4

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

$y = 1 + \sqrt{x-2} + \sqrt{-(x-2)^2(x-5)(x-8)}$

12.

$y = \frac{1}{4}x^2 - 8$

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

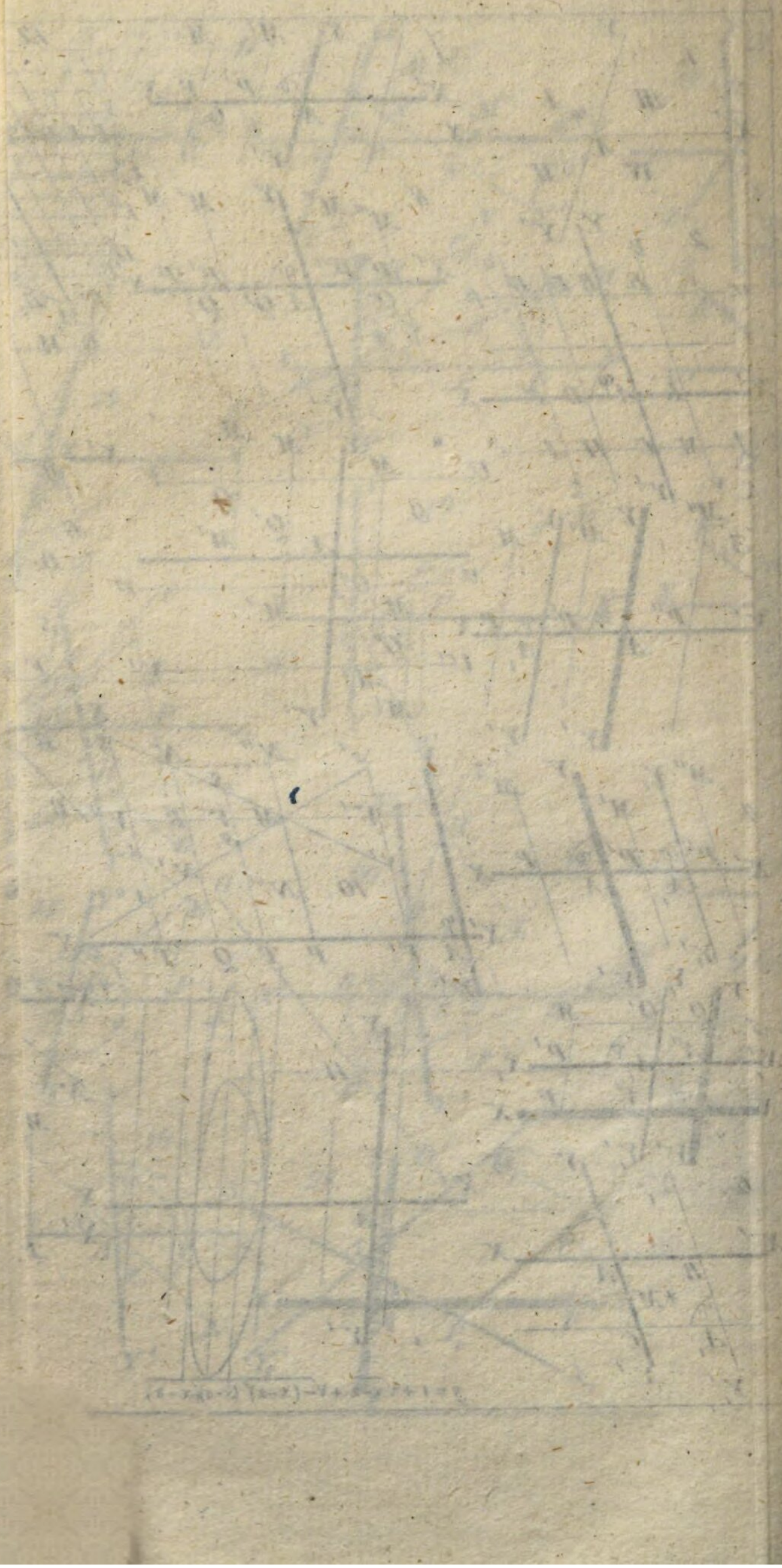
26.

27.

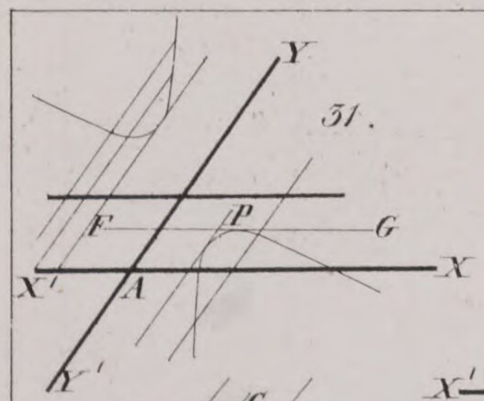
28.

29.

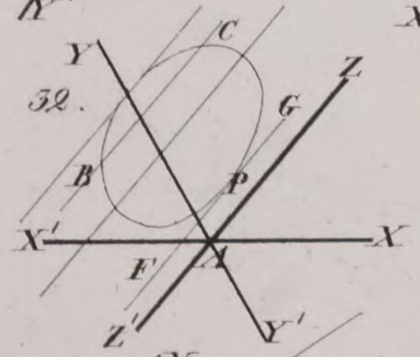
30



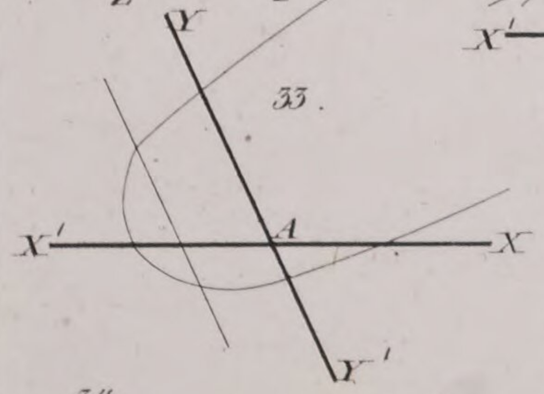
31.



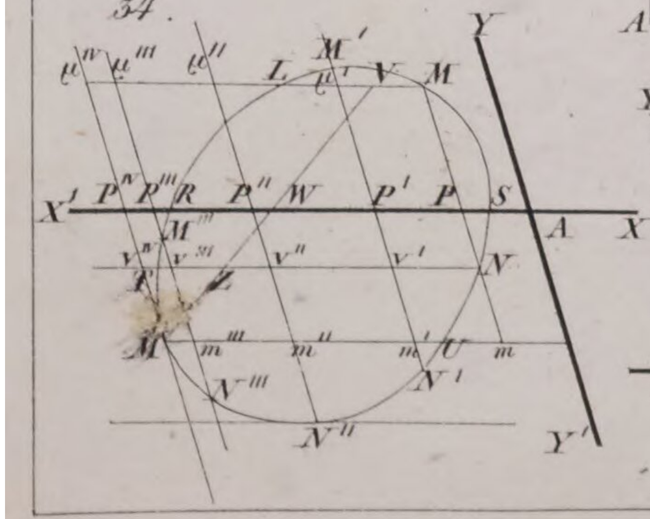
32.



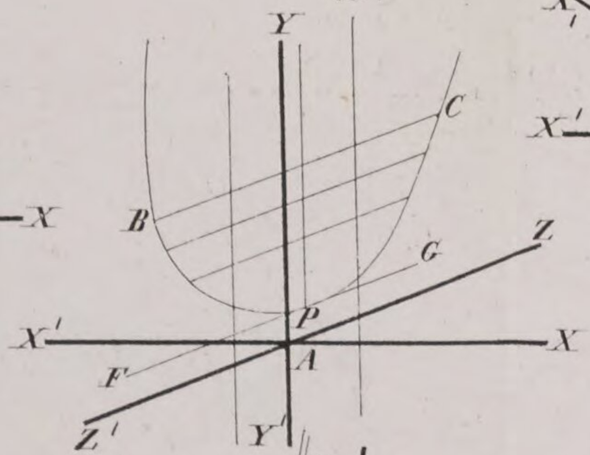
33.



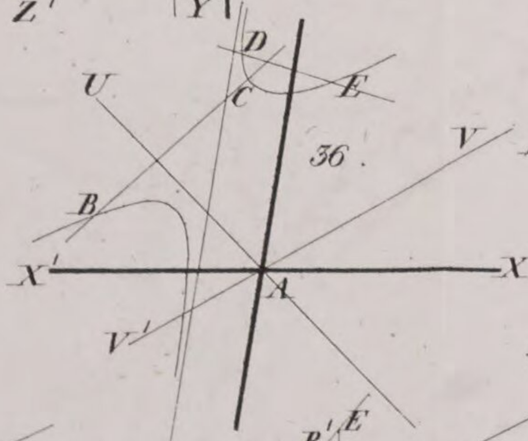
34.



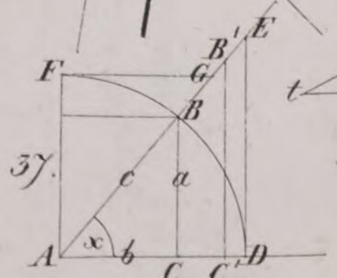
35.



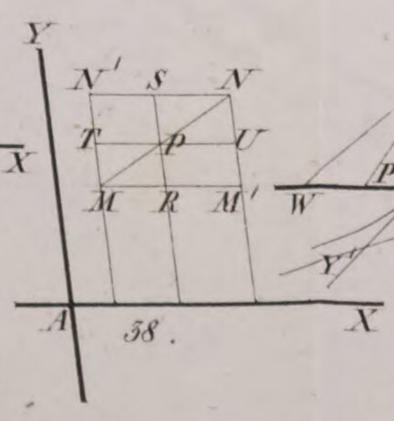
36.



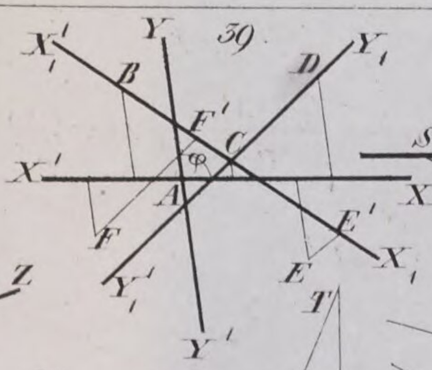
37.



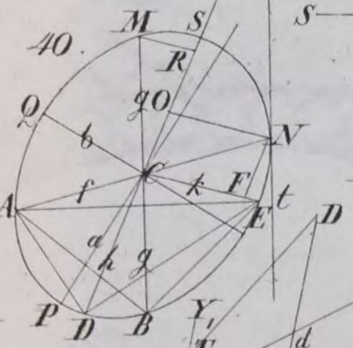
38.



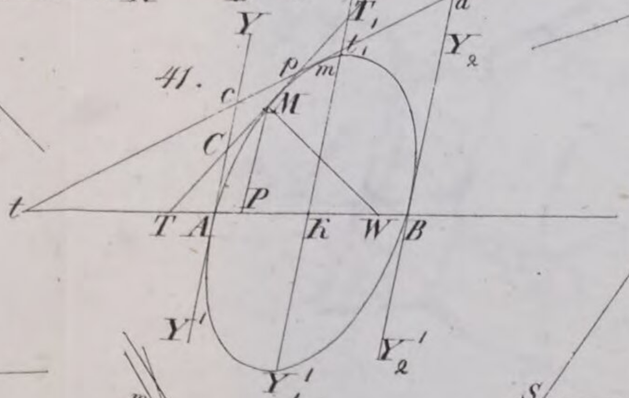
39.



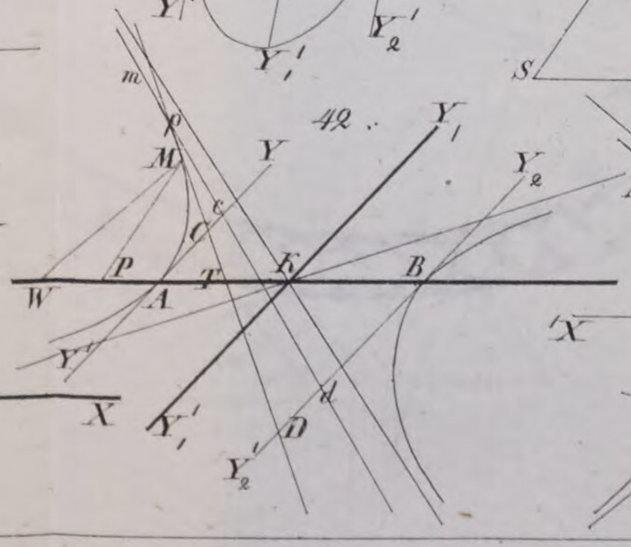
40.



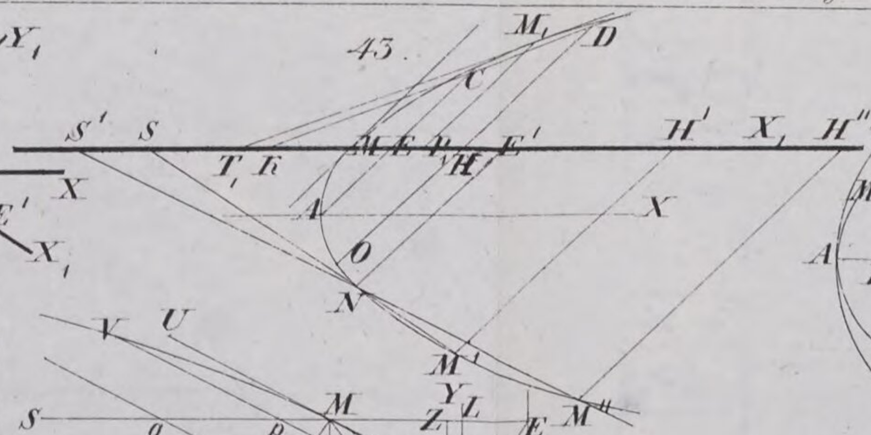
41.



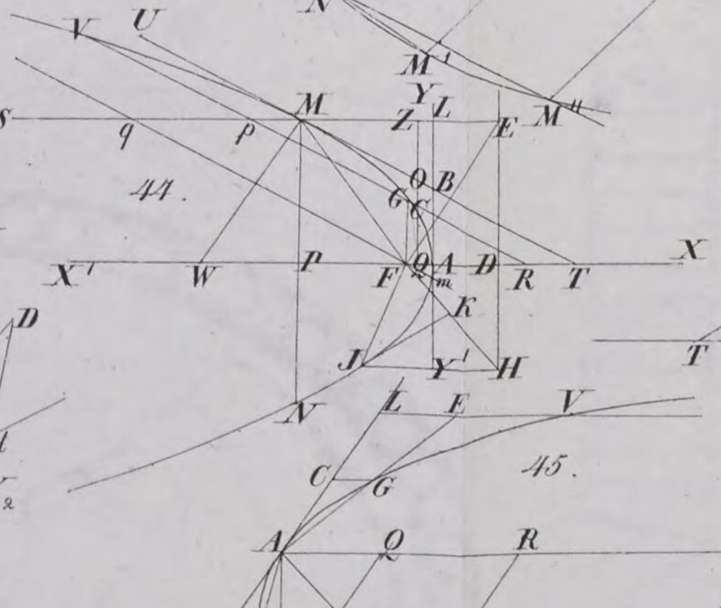
42.



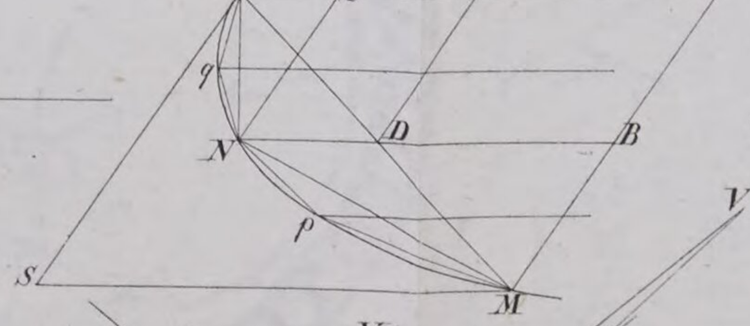
43.



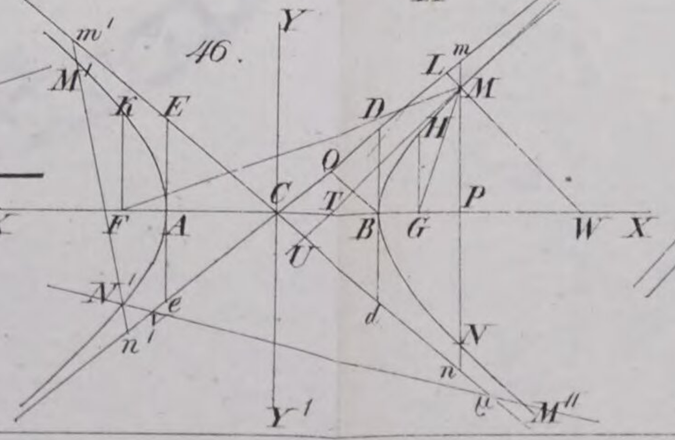
44.



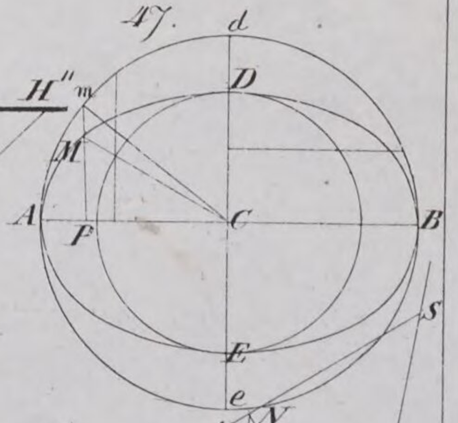
45.



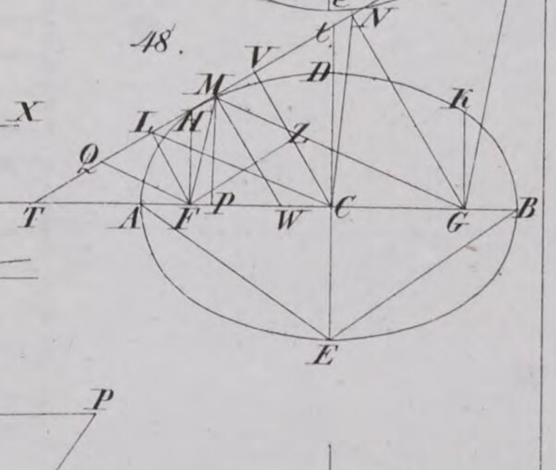
46.



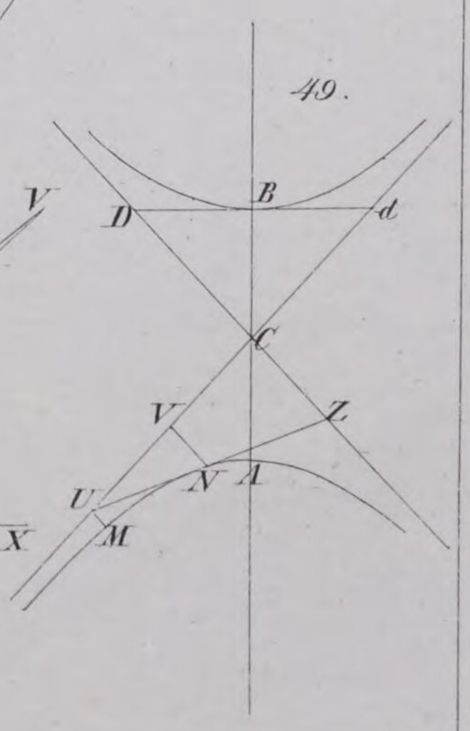
47.



48.



49.



8

9

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Die analytische und höhere Geometrie in ihren Elementen mit vorzüglicher Berücksichtigung der Theorie der Kegelschnitte ; zunächst für seine Universitäts-Vorlesungen, dann aber auch für ähnliche Anstalten und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet

Berlin 1826

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 635
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267608-1